MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

AUS DEN REVENUEN DER GRAF ALEXANDER VIGYÁZÓ STIFTUNG
UNTERSTÜTZT DURCH DIE UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA)

REDIGIERT VON
JOSEF KÜRSCHÁK UND BÉLA MAURITZ
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

SECHSUNDDREISSIGSTER BAND 1929

BUDAPEST
DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN
1929

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

AUS DEN REVENUEN DER GRAF ALEXANDER VIGYÁZÓ STIFTUNG
UNTERSTÜTZT DURCH DIE UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA)

REDIGIERT VON
JOSEF KÜRSCHÁK UND BÉLA MAURITZ
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

SECHSUNDDREISSIGSTER BAND 1929

BUDAPEST
DRUCK DES FRANKLIN-VEREIN
1929

360151

M. T. AKAD. KÖNYVTÁRA
I. sz. Növekmény
1929. 4099 sz.

INHALT DES XXXVI. BANDES.

		Seite
1.	L. Klug: Über konfokale Kegelschnitte	1
2.	B. Mauritz: Phillipsit aus den Basaltgesteinen des Plattensee-gebietes (Balatongebietes)	24
3.	F. Kövessi: Erläuterungen der Gesetzmässigkeiten im Ablaufe der Lebenserscheinungen lebender Wesen I.	29
4.	F. Kövessi: Erläuterungen der Gesetzmässigkeiten im Ablaufe der Lebenserscheinungen lebender Wesen II.	67
5.	F. Kövessi: Erläuterungen der Gesetzmässigkeiten im Ablaufe der Lebenserscheinungen lebender Wesen III.	88
6.	K. v. Zelovich: Ungarische Erfolge wissenschaftlicher Technik	99
7.	R. v. Soó: Experimental-ökologische Studien am Balaton	116

M. TUD. AKADÉMIA KÖNYV-TÁRA

ÜBER KONFOKALE KEGELSCHNITTE.

Von L. KLUG.

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung vom 3. Juni 1928.*

In dieser Arbeit wollen wir eine Übersicht über diejenigen Kegelschnitte geben, die von zwei konfokalen Kegelschnitten den einen doppelt berühren und deren zwei reelle oder konjugiert-imaginäre Brennpunkte auf dem anderen Kegelschnitt liegen. Zum Beweis der bezüglichen Sätze gehen wir aus metrischen Beziehungen aus. Alsdann sollen die gefundenen Eigenschaften auf zwei Kegelschnitte in allgemeiner Lage übertragen und die Beweise aus projektiven Eigenschaften der beiden Kegelschnitte direkt abgeleitet werden.

*

1. Wir bezeichnen in dieser Arbeit die zwei konfokalen Kegelschnitte mit k_m, k_n, ihren Mittelpunkt mit O, ihre reellen Brennpunkte mit F, F' und deren Abstand mit $2d$, ihre Hauptachsen mit $2m$, $2n$, ihre Nebenachsen mit $2m_1$, $2n_1$.

Die aus einem Punkte A der Nebenachse ausstrahlenden Tangenten der Kegelschnitte k_m, k_n berühren diese in den Punktpaaren MM_1, NN_1, welche mit A und den Brennpunkten auf einem Kreis c liegen (Fig. 1). Da die Schenkel der Winkel NMN_1, NM_1N_1 bezw. zu den Tangenten der Punkte M, M_1 gleich geneigt sind, so gibt es einen Kegelschnitt $\varkappa$, der k_m in den Punkten M, M_1 berührt und dessen Brennpunkte N, N_1 sind.

Um die Achsen dieses Kegelschnitts $\varkappa$ zu bestimmen, seien

* Ungarisch erschienen unter dem Titel: Konfokális kúpszeletekről. Mathematikai és Természettudományi Értesítő, Bd. XLV. p. 584.

die Fusspungte der aus dem Punkt F auf die Tangenten AM, AN gefällten Senkrechten F_m, F_n; der Fusspunkt der aus dem Punkte N auf die Tangente AN gefällten Senkrechten sei N_m; der Halbierungspunkt der Strecke NN_1 sei O_n.

Da AOF_nF_m, AO_nNN_m Sehnenvierecke sind, so sind F_nOF_m, NO_nN_m ähnliche Dreiecke; also ist $OF_m : OF_n = O_nN_m : O_nN$.

Da nun OF_m, OF_n, O_nN_m die halben Hauptachsen der Kegelschnitte k_m, k_n, $\varkappa$ sind: so liegen die Scheitel der Hauptachsen des Kegelschnitts $\varkappa$ auf einem mit k_n affinen Kegelschnitt φ, dessen Hauptachse mit der des Kegelschnitts k_m und dessen Nebenachse mit der des Kegelschnitts k_n koinzidiert, und

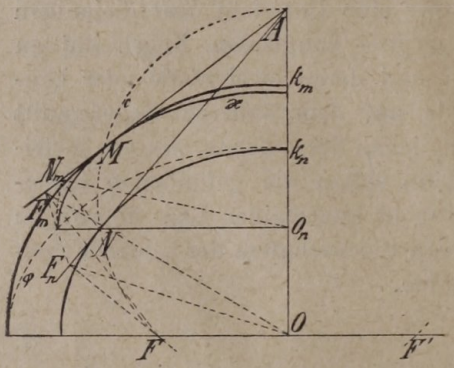


Fig. 1.

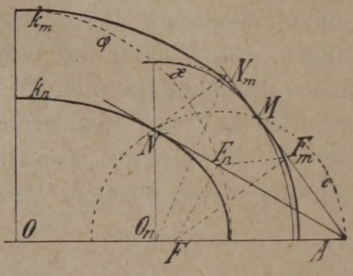


Fig. 2.

das Verhältnis der halben Hauptachse (O_nN_m) des Kegelschnitts $\varkappa$ zu seiner Exzentricität (O_nN) ist vom Punkte A unabhängig.

Bei Veränderung des Punktes A auf der Nebenachse der Kegelschnitte k_m, k_n erhält man ∞^1 solche Kegelschnitte $\varkappa$; diese sind ähnlich und ähnlich-liegend, und der geom. Ort der Scheitel ihrer Hauptachsen ist der mit k_n bezüglich seiner Nebenachse als Affinitätsachse orthogonal-affine Kegelschnitt φ, der k_m in den Scheiteln seiner Hauptachse berührt. —

Wir nehmen weiterhin den Punkt A auf der Hauptachse der Kegelschnitte k_m, k_n an (Fig. 2) und bezeichnen die Berührungspunkte der aus ihm zu jenen Kegelschnitten ausstrahlenden Tangenten wieder mit MM_1, NN_1. Da hier ebenfalls die Schenkel der Winkel NMN_1, NM_1N_1 zu den Tangenten der

Punkte M, bezw. M_1 gleich geneigt sind, so gibt es einen Kegelschnitt $\varkappa$, der k_m in den Punkten M, M_1 berührt und dessen Brennpunkte die Punkte N, N_1 sind.

Bezeichnet man mit F_m, F_n bezw. F'_m, F'_n die Fusspunkte der aus den Punkten F bezw. F' auf die Tangenten AM, AN gefällten Senkrechten, mit N_m den Fusspunkt der aus dem Punkte N auf die Tangente AM gefällten Senkrechten, mit O_n den Halbierungspunkt der Strecke NN_1: so sind wieder die Dreiecke FF_mF_n, $F'F'_mF'_n$, O_nN_mN ähnlich, also:

$$FF_m : FF_n = O_nN_m : O_nN \quad \text{und} \quad F'F'_m : F'F'_n = O_nN_m : O_nN.$$

Da nun $FF_m.F'F'_m = m_1^2$ und $FF_n.F'F'_n = n_1^2$, so ergibt sich aus dem Produkte jener Proportionen $O_nN_m : O_nN = m_1 : n_1$,

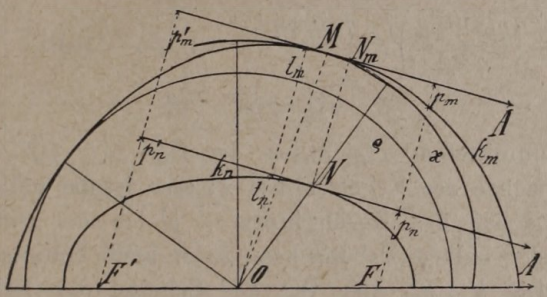


Fig. 3.

d. h. das Verhältnis der halben Hauptachse von $\varkappa$ zu seiner Exzentricität ist vom Punkte A unabhängig.

Es gibt ∞^1 solche ähnliche und ähnlich-liegende Kegelschnitte $\varkappa$; der Ort der Scheitel ihrer auf die Hauptachse der Kegelschnitte k_m, k_n senkrechten Achsen ist ein zu k_n bezüglich seiner Hauptachse als Affinitätsachse orthogonalaffiner Kegelschnitt φ, welcher k_m in den Scheiteln seiner Nebenachse und k_n in den Scheiteln seiner Hauptachse berührt. —

Nehmen wir schliesslich den Punkt A auf der unendlichfernen Geraden an (Fig. 3). Die aus A ausstrahlenden, also parallelen Tangenten der Kegelschnitte k_m, k_n berühren diese in den Endpunkten M, M_1; N, N_1 von Durchmessern, welche mit den Brennpunkten F, F' auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen.

Nachdem die diametral gegenüberliegenden Sehnen NF, N_1F' aus M und M_1 (wie auch aus jedem Punkte der Hyperbel) durch gleiche Winkel projiziert werden, so haben die Schenkel der Winkel NMN_1, NM_1N_1 zu den Tangenten der Punkte M, bezw. M_1 gleiche Neigung. Man hat daher hier ebenfalls einen Kegelschnitt $\varkappa$, der k_m in den Punkten M, M_1 berührt und dessen Brennpunkte N, N_1 sind; seine halbe Hauptachse ist gleich dem Abstande des Mittelpunktes O vom Fusspunkte N_m der aus N auf die Tangente AM gefällten Senkrechten.

Haben O, F, F' von der Tangente AM des Punktes M die Abstände t_m, p_m, p'_m und von der Tangente AN des Punktes N die Abstände t_n, p_n, p'_n, so hat man, da diese Tangenten parallel sind: $p_m - p_n = p'_m - p'_n$. Daraus folgt

$$\left(\frac{p_m+p'_m}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_n+p'_n}{2}\right)^2 = p_m p'_m - p_n p'_n,$$

oder

$$t_m^2 - t_n^2 = m_1^2 - n_1^2.$$

Wie unmittelbar ersichtlich, ist $t_m^2 - t_n^2 = \overline{ON_m}^2 - \overline{ON}^2 =$ der Nebenachse des Kegelschnitts $\varkappa$; also ist das halbe Quadrat der Nebenachse des Kegelschnitts $\varkappa$ gleich der Differenz der Quadrate der halben Nebenachsen (oder auch Hauptachsen) der Kegelschnitte k_m, k_n. Der Ort der Scheitel der Nebenachsen dieser Kegelschnitte $\varkappa$, die wir bei Veränderung der Richtung der parallelen Tangenten MA, NA erhalten, ist ein mit k_m, k_n konzentrischer Kreis ϱ, dessen Durchmesserquadrat gleich ist der Differenz der Quadrate der gleichnamigen Achsen der zwei konfokalen Kegelschnitte.

Also:

Es gibt ∞^1 Kegelschnitte $\varkappa$, welche von zwei konfokalen Kegelschnitten k_m, k_n, den ersten in den Endpunkten der auf der einen oder anderen Achse senkrechten Sehnen doppelt berühren, und deren Brennpunkte die Endpunkte der zu jenen parallelen Sehnen des zweiten Kegelschnitts sind; die Tangenten in den Endpunkten dieser zusammengehörigen Sehnen treffen sich in einem Punkte der betreffenden Achse. Diese Kegelschnitte $\varkappa$ sind in Anbetracht der einzelnen Achsen für sich ähnlich und ähnlich-liegend.

Ausserdem gibt es noch ∞^1 Kegelschnitte $\varkappa$, welche k_m in den Endpunkten ihrer Durchmesser berühren, und deren Brennpunkte diejenigen Endpunkte von Durchmessern des Kegelschnitts k_n sind, deren Tangenten mit den Tangenten der Endpunkte jener Durchmesser parallel liegen. Diese Kegelschnitte $\varkappa$ berühren in den Scheitelpunkten ihrer Nebenachsen einen mit k_m, k_n konzentrischen Kreis, dessen Durchmesserquadrat gleich ist der Differenz der Quadrate der gleichnamigen Achsen der Kegelschnitte k_m, k_n.

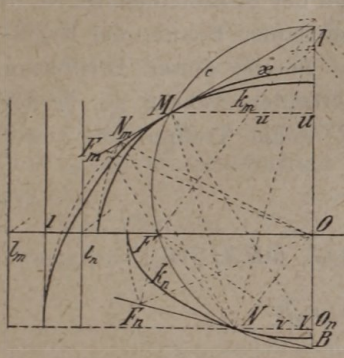


Fig. 4.

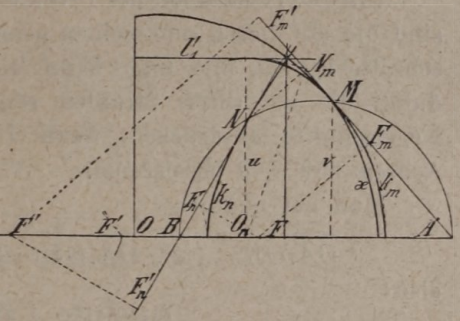


Fig. 5.

Die zwei Kegelschnitte $\varkappa$ dieses Systhems, welche k_m in den Scheitelpunkten seiner Achsen berühren, gehören zu je einem der zwei ersten Systheme.

Aus dem Beweis folgt noch der Satz:

Zwei parallele Tangenten zweier konfokalen Kegelschnitten sind vom Mittelpunkte in solchen Abständen, deren Quadrate eine konstante Differenz haben.

2. Wir nehmen wieder auf einer Achse der konfokalen Kegelschnitte k_m, k_n den Punkt A an und führen von ihm aus Tangenten zu k_m; diese berühren ihn in den Punkten MM_1, und der Kreis $AMM_1=c$ geht entweder durch die Brennpunkte F, F' oder trennt diese harmonisch. Vom zweiten Treffpunkt B des Kreises c mit der nämlichen Achse führen wir Tangenten zu dem Kegelschnitt k_n, welche diesen in den Punkten NN_1 berühren (Fig. 4 u. 5).

Bei Veränderung des Punktes A auf der nämlichen Achse beschreiben seine Polaren $u = MM_1$ nach k_m und die Polaren $v = NN_1$ des Punktes B nach k_n ein involutorisches Parallelstrahlenbüschel. (Sie sind nämlich zunächst mit den projektiven Reihen der Punkten A, B projektiv. Ist anderseits A der unendlichferne Achsenpunkt, so fällt u in die andere Achse und v in die unendlichferne Gerade; und liegt A im Mittelpunkt O, so kommt u in die unendlichferne Gerade und v in die frühere Kegelschnittsachse.)

Die Doppelstrahlen der Involution der Strahlenbüchsel (u, v) sind die auf diesen senkrechten gemeinsamen Sehnen der Kegelschnitte k_m, k_n, und man kann die Potenz dieser Involution durch die auf ihren Strahlen senkrechten Achsen 2μ, 2ν der Kegelschnitte ausdrücken, wenn U, V die Treffpunkte dieser Achsen mit u, v bezeichnen.

Man hat nämlich

$$OA.OB = \pm d^2,\ OA.OU = \pm \mu^2,\ OB.OV = \pm \nu^2,$$

also

$$OU.OV = \pm \mu^2.\nu^2/d^2.$$

Das erste Produkt ist positiv oder negativ, je nachdem die Punkte A, B auf der Haupt- oder Nebenachse der Kegelschnitte k_m, k_n liegen; das zweite und dritte Produkt ist negativ, wenn die Punkte A, B auf der Nebenachse liegen und der betreffende Kegelschnitt eine Hyperbel ist, sonst aber immer positiv; also ist das vierte Produkt, d. h. die Potenz jener Involution negativ, wenn die Punkte A, B auf der Nebenachse der zwei Kegelschnitte k_m, k_n liegen und diese gleichartig sind, in jedem anderen Falle ist es positiv.

Die auf die Hauptachse senkrechten gemeinsamen Sehnen der zwei konfokalen Kegelschnitte k_m, k_n sind also immer reell, und die auf die Nebenachse senkrechten gemeinsamen Sehnen sind nur dann reell, wenn die Kegelschnitte ungleichartig sind. In jedem der Brennpunkte F oder F' der Kegelschnitte k_m, k_n vereinigen sich die zwei Punkte A, B; die zu dem Brennpunkte F gehörige Leitlinien l_m, l_n und die zu dem Brennpunkte F' gehörige Leitlinien l'_m, l'_n trennen also,

als zugeordnete Strahlen der Involution (u, v), die auf die Hauptachse senkrechten gemeinsame Sehnen l, l' der Kegelschnitte k_m, k_n harmonisch.

Die Polaren $u = MM_1$, $v = NN_1$ der Punkte A, B haben nun die Lage, daß NN_1 die Brennpunkte eines Kegelschnitts x sind, der k_m in dem Punktpaare MM_1 berührt.

Man kann nun zeigen, daß dieser Kegelschnitt in seinen auf der Achse $NN_1 = v$ liegenden Scheiteln die auf diese Achse senkrechten gemeinsamen Sehnen der Kegelschnitte k_m, k_n berührt.

Es seien zu dem Ende die Fusspunkte der aus dem Brennpunkte F auf die Tangenten AM, BN gefällten Senkrechten F_m, F_n (Fig. 4), der Fusspunkt der aus N auf die Tangente AM gefällten Senkrechten sei N_m, die Mitte der Strecke NN_1 sei O_n.

Die Dreiecke OF_mF, OF_nF, O_nN_mN sind bezw. mit den Dreiecken BMF, ANF, BMN ähnlich, also:

$$\begin{aligned} OF_m : OF &= BM : BF \\ OF_n : OF &= AN : AF \\ O_nN : O_nN_m &= BN : BM. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Proportionen und zieht dabei in Betracht, daß $AF.BF = AB.OF$, $AN.BN = AB.O_nN_m$, so hat man: $OF_m.OF_n = OF.O_nN_m$, oder einfacher: $O_nN_m = mn/d$.

Da nun O_nN_m die halbe Länge der Hauptachse des Kegelschnitts x bedeutet, ferner die Leitlinien l_m, l'_m und l_n, l'_n der Kegelschnitte k_m, k_n vom Mittelpunkt O den Abstand m^2/d, bezw. n^2/d haben: so trennen die gemeinsamen Sehnen l, l' dieser Kegelschnitte die Leitlinienpaare l_m, l_n und l'_m, l'_n harmonisch. —

Analoge Beziehungen können wir zeigen für diejenigen Kegelschnitte x, welche k_m in den Endpunkten der zur Hauptachse senkrechten Sehnen berühren und deren Brennpunkte die Endpunkte der zu diesen parallele Sehnen von k_n sind (Fig. 5).

Es mögen die Punkte A, B die Brennpunkte F, F' harmonisch trennen, und je eine aus A und B ausstrahlende Tangente der Kegelschnitte k_m, bezw. k_n möge diese in den Punk-

ten M, N berühren; ferner seien die Fusspunkte der aus den Brennpunkten F, F' auf die Tangenten AM und AN gefällten Senkrechten F_m, F'_m und F_n, F'_n; endlich seien die Fusspunkte der aus dem Punkte N auf die Geraden FF', AM gefällten Senkrechten O_n, N_m.

Da die Punkte $ABFF'$ einen harmonischen Wurf bilden, und O die Mitte der Strecke FF' ist, so hat man die Beziehung

$$AF.AF'.BF.BF'+\overline{OF}^2.\overline{AB}^2=0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\sin^2 A \,.\, \sin^2 B$ (wo $\measuredangle A = MAB$, $\measuredangle B = NBA$) und zieht dabei in Betracht, daß

$$AF.AF'.\sin^2 A = FF_m.F'F'_m = m_1^2,$$
$$BF.BF'.\sin^2 B = FF_n.FF'_n = n_1^2$$

(von welchen beiden Ausdrücken einer negativ ist), und benützt die schon früher abgeleitete Beziehung

$$\overline{AB}^2\sin^2 B.\overline{AB}^2.\sin^2 A = \overline{AN}^2.\overline{BM}^2 = \overline{O_nN_m}^2.\overline{AB}^2,$$

so erhält man

$$-m_1^2.n_1^2 + d^2.\overline{O_nN_m}^2 = 0,$$

d. h.

$$O_nN_m = \pm\, m_1 n_1/d.$$

Daher ist die Länge der auf der Geraden O_nN liegenden Achse des Kegelschnitts $\varkappa$ gleich dem Abstande der zur Hauptachse der parallelen gemeinsamen Sehnen l_1, l'_1 der Kegelschnitte k_m, k_n; der Kegelschnitt $\varkappa$ berührt somit diese Sehnen. —

Es gibt aber noch ein Systhem der Kegelschnitte $\varkappa$, welche k_m in den Endpunkten ihrer Durchmesser berühren und deren Brennpunkte ebenfalls die Endpunkte der Durchmesser von k_n sind. (Fig. 6.)

Berühren zwei Gegenseiten eines Rechteckes den Kegelschnitt k_m in den Punkten M, M_1 und berühren dessen beide anderen Gegenseiten den Kegelschnitt k_n in den Punkten N, N_1, dann gibt es aus dem nämlichen Grunde wie früher einen Kegelschnitt $\varkappa$, der k_m in den Punkten M, M_1 berührt und dessen Brennpunkte N, N_1 sind. Die Länge der Haupt-

achse dieses Kegelschnitts ist gleich dem Durchmesser des dem Rechteck umschriebenen Kreises k, welcher daher x in den Scheiteln seiner mit dem Durchmesser inzidenten Achse berührt.

Ist P der Treffpunkt der Tangenten der Punkte M, N; ferner F_m, F_n das Spiegelbild des Brennpunktes F nach den Tangenten PM, PN; endlich N_m das Spiegelbild des Punktes

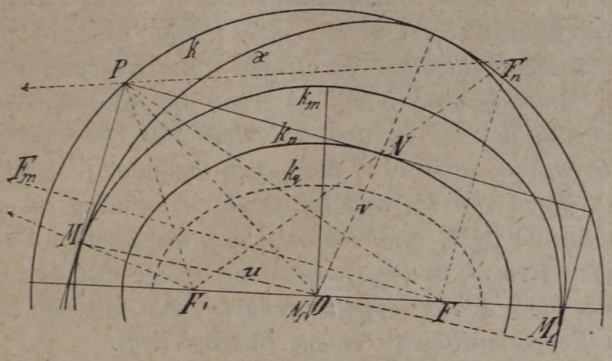


Fig. 6.

N in Bezug auf die Tangente MP: so folgt aus den Dreiecken $F_mF'F_n$, FPF' daß:

$$\overline{F'F_m}^2+\overline{F'F_n}^2 = 2.\overline{PF'}^2+2.\overline{PF_m}^2 =$$
$$= 2.\overline{PF'}^2+2.\overline{PF}^2 = 4.\overline{OP}^2+4.\overline{OF}^2,$$

also:

$$OP^2 = r^2 = m^2+n^2-d^2,$$

und das ist das Quadrat der halben Hauptachse des Kegelschnitts x.

Der Kreis k aber, welcher x in seinen Scheiteln berührt, liegt mit k_m, k_n in einem Büschel.

Ist nämlich T der Berührungspunkt einer beliebigen Tangente des Kegelschnitts k_m und trifft diese den Kreis k in den Punkten P, P_1, den Kegelschnitt k_n in den Punkten Q, Q_1; ist ferner PP_1TT' ein harmonischer Wurf: so ist die im Punkte T auf t errichtete Senkrechte, als konjugierte Polare von t nach beiden Kegelschnitten, die Polare des Punktes T' nach k_n. Darum ist auch QQ_1TT' ein harmonischer Wurf und die Punkt-

paare PP_1, QQ_1, TT' bilden somit eine Involution, was die Richtigkeit der Behauptung beweist.

Also:

Trennen die Punkte AB die Brennpunkte auf der einen oder anderen Achse der zwei konfokalen Kegelschnitte k_m, k_n harmonisch, oder sind sie die unendlichfernen Punkte von zwei senkrechten Geraden, und berühren die aus dem Punkte A zu dem Kegelschnitt k_m und aus dem Punkte B zu dem Kegelschnitt k_n ausstrahlenden Tangenten diese Kegelschnitte bezw. in den Punkten MM_1, NN_1: so wird der Kegelschnitt $\varkappa$, der den Kegelschnitt k_m in den Punkten MM_1 berührt und der seine Brennpunkte in NN_1 hat, auch diejenigen zwei gemeinsamen Sehnen von k_m und k_n berühren, welche zu der Berührungssehne MM_1 senkrecht stehen; im zweiten Falle aber denjenigen Kreis k in den Endpunkten seiner auf der Geraden NN_1 liegenden Achse doppelt berühren, der mit den zwei konfokalen Kegelschnitten in einem Büschel liegt.

3. Wir nehmen im Folgenden an, dass die zwei konfokalen Kegelschnitte k_m, k_n einer Parabelschar angehören. Es werden dann von den Systhemen der Kegelschnitte $\varkappa$, welche die Parabel k_m in zwei Punkten berühren und ihre Brennpunkte auf der Parabel k_n haben, zweimal zwei sich vereinigen, so daß nur vier von einander verschiedene Systheme übrig bleiben.

Wir wollen die Leitlinien der zwei Parabeln k_m, k_n mit l_m, l_n; ihre Scheiteln mit S_m, S_n; ihre Parameter mit p_m, p_n bezeichnen, so daß $S_mF = p_m/4$, $S_nF = p_n/4$.

Zwei parallele Tangenten mögen die zwei Parabeln in den Punkten M, N berühren (Fig. 7) und die im Brennpunkte auf die Gerade MNF errichtete Senkrechte möge die zwei Tangenten in den Punkten F_m, F_n treffen, endlich sei N_m der Fusspunkt der aus N auf die Tangente des Punktes M gefällten Senkrechten, und σ der Treffpunkt der aus N_m auf die Parabelachse und aus N auf die Leitlinie gefällten Senkrechten.

Es wird dann $N\sigma \# S_nS_m$ (denn $NN_m \# F_nF_m$); daher gibt es eine Parabel $\varkappa$, welche die Parabel k_m im Punkte M berührt, deren Brennpunkt und Scheitelpunkt N und σ ist, also deren Parameter gleich ist der Summe oder der Differenz der Para-

meter der zwei Parabeln k_m, k_n, je nachdem der Brennpunkt auf der Strecke S_mS_n oder ausserhalb desselben liegt.

Es gibt ∞^1 solche Parabeln wie $\varkappa$; diese sind alle kongruent, da ihre Parameter gleich $4.S_mS_n$ sind; und der Ort der Scheitel σ dieser Parabeln ist eine mit k_n kongruente Parabel φ, deren Scheitel in S_m liegt. —

Bezeichnen wir desweiteren die Berührungspunkte der aus dem Punkte A der Parabelachse ausstrahlenden Tangentenpaare der Parabeln k_m, k_n mit MM_1 und NN_1 (Fig. 8), ferner seien F_m und F_n die Fusspunkte der aus dem Punkte F auf die

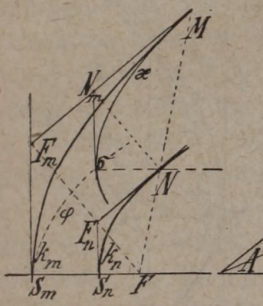


Fig. 7.

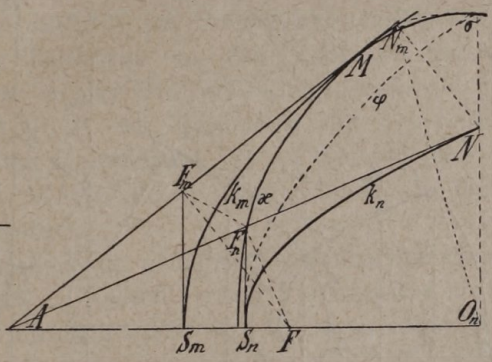


Fig. 8.

Tangenten AM und AN gefällten Senkrechten, endlich seien N_m und O_n die Fusspunkte der aus dem Punkte N auf die Tangente AM und die Parabelachse gefällten Senkrechten.

Da $\overline{FF_m}^2 = AF.S_mF$ und $\overline{FF_n}^2 = AF.S_nF$, ferner die Dreiecke FF_mF_n, O_nN_mN ähnlich sind, so hat man:

$$\overline{O_nN_m}^2 : \overline{O_nN}^2 = \overline{FF_m}^2 : \overline{FF_n}^2 = p_m : p_n.$$

Es gibt daher einen Kegelschnitt $\varkappa$, welcher die Parabel k_m in den Punkten M, M_1 berührt und dessen Brennpunkte NN_1 sind; das Verhältnis der Quadrate seiner halben Hauptachse zur Exzentricität ist gleich dem Verhältnisse der Parameter der Parabeln, und die Scheitel dieser Achse liegen auf

einer mit k_m kongruenten Parabel φ, welche die Verschiebung ist von k_m in der Richtung und um die Strecke $S_m S_n$.

Bei Veränderung des Punktes A auf der Parabelachse erhält man ∞^1 solche Kegelschnitte wie $\varkappa$, die ähnlich sind in ähnlicher Lage; der Ort der ausserhalb der Parabelachse liegenden Scheitel ist die Parabel φ. —

Um nun den dritten Fall zu betrachten, möge (Fig. 9) ein aus dem Brennpunkt F als Mittelpunkt beschriebene Kreis c die Achse in den Punkten A, B treffen und M, M_1, sowie N, N_1

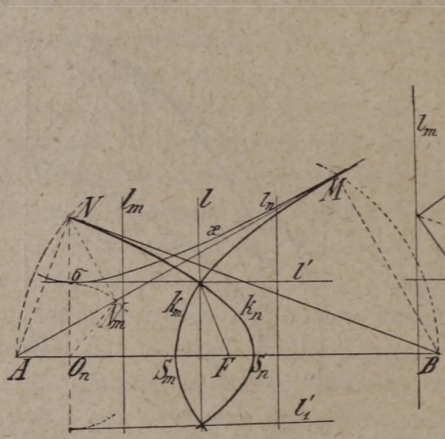


Fig. 9.

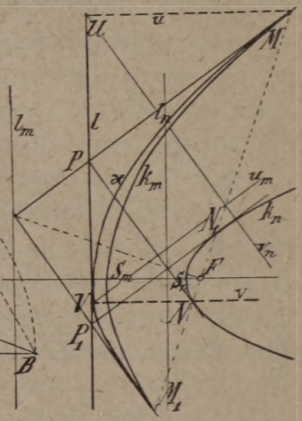


Fig. 10.

seien die Berührungspunkte der aus den Punkten A und B bezw. zu den Kegelschnitten k_m, k_n ausstrahlenden Tangenten; O_m sei die Mitte der Sehne NN_1 und N_m der Fusspunkt der aus N auf die Tangente AM gefällten Senkrechten.

Es gibt dann wieder einen Kegelschnitt $\varkappa$, der k_m in den Punkten M, M_1 berührt, dessen Brennpunkte N, N_1 sind und dessen mit NN_1 inzidente Achse die Länge $2.O_nN_m$ hat.

Benützt man die schon bekannte Beziehung

$$O_nN_m.AB = AN.BM,$$

so folgt daraus

$$\overline{O_nN_m}^2 = \frac{\overline{AN}^2}{AB} \cdot \frac{\overline{BM}^2}{AB} = AO_n.BO_m = \frac{p_n}{2} \cdot \frac{p_m}{2}.$$

Nun ist das Quadrat der Abstände der Treffpunkte der zwei Parabeln k_m, k_n ebenfalls $p_m p_n/4$, also berührt der Kegelschnitt $\varkappa$ (wie auch alle übrigen analog konstruirten Kegelschnitte) in seinen auf der Achse NN_1 liegenden Scheiteln die zur Parabelachse parallelen gemeinsamen Sehnen l', l_1' der zwei Parabeln, und die zur Parabelachse senkrechte gemeinsame Sehne l der Parabeln hat von ihren Leitlinien l_m, l_n gleichen Abstand. —

Möge schließlich eine mit dem Brennpunkt F inzidente Sehne (Fig. 10) die Parabeln k_m, k_n in den Punkten MM_1, NN_1 treffen. Die Tangenten dieser Punkte bilden ein Rechteck, dessen zwei Gegeneckpunkte auf den Leitlinien l_m, l_n liegen, und da ihre auf die Sehne MM_1NN_1 im Brennpunkte senkrechte Verbindungsgerade die Leitlinien von den Seiten des Rechteckes harmonisch trennen: so ist die Verbindungsgerade l der zwei anderen Eckpunkte P, P_1 des Rechteckes mit den Leitlinien parallel und bildet den geometrische Ort der Scheitel jener rechten Winkel MPN, M_1PN_1, deren jeder Schenkel je eine der Parabeln k_m, k_n berühren.

$l \equiv PP_1$ ist auch dann gemeinsame Sehne der Parabeln, wenn sich dieselben in keinen reellen Punkten treffen; denn die durch die Berührungspunkte M, N des rechten Winkels MPN gehenden Durchmesser u, v der Parabeln treffen l in den Punkten U, V, welche (da P die Strecke UV halbiert) konjugierte Pole sind nach beiden Parabeln.

Das Produkt des Abstände der konjugierten Pole U, V ist $p_m p_n/4$; denn die Sehne l und die Polare v_n des Punktes V nach k_n schneiden von der Parabelachse eine $p_m/2$ gleiche Strecke ab, und ebenso schneidet auch l und die Polare u_m des Punktes U nach k_m von der Parabelachse eine $p_n/2$ gleiche Strecke ab, woraus die Behauptung folgt. Man sieht aber auch, daß die Parabeldurchmesser, die durch die Berührungspunkte M, N der Schenkel des rechten Winkels MPN gehen, eine Involution bilden, deren Doppelstrahlen die zur Parabelachse parallelen gemeinsamen Sehnen der Parabeln sind. Endlich berührt sowohl die Parabel $\varkappa$, welche mit k_m im Punkte M eine Berührung hat und deren Brennpunkt und Achse N und v sind, als auch die Parabel $\varkappa_1$, welche mit k_n im Punkte N eine Berührung hat

und deren Brennpunkt und Achse M und u sind, die gemeinsame Sehne l der Parabeln k_m, k_n in den Punkten V bezw. U.

Also:

Diejenigen Kegelschnitte $\varkappa$, welche die Parabel k_m doppelt berühren und deren Brennpunkte auf einer mit jener konfokalen Parabel k_n liegen, sind Parabeln und Zentralkegelschnitte. Dieselben kann man in zwei Systeme zusammenfassen.

Die Achsen der Parabeln sind mit der Parabelachse der konfokalen Parabeln parallel und berühren daher die eine der angenommenen Parabeln in einem Punkte und haben ihren Brennpunkt auf der anderen Parabel.

Die Parabeln des einen Systems sind kongruent und ihre Parameter sind gleich dem vierfachen Abstand der Scheitel der Parabeln k_m, k_n; die zusammengehörigen Berührungspunkte und Brennpunkte haben parallele Tangenten.

Die Parabeln des zweiten Systemes berühren in ihren Scheiteln die zur Parabelachse gemeinsame Sehne der Parabeln k_m, k_n; die Tangenten der zusammengehörigen Berührungspunkte und Brennpunkte stehen aufeinander senkrecht.

Die Zentralkegelschnitte $\varkappa$ des einen Systemes sind ähnlich und ähnlich-liegend, und die Tangenten der zusammengehörigen Berührungspunkte und Brennpunkte treffen sich in einem Punkte der Parabelachse.

Verschiebt man die Parabel der Berührungspunkte, bis ihr Scheitel in dem Scheitel der anderen Parabel gelangt, so erhält man in dieser Lage den Ort der ausserhalb der Parabelachse liegenden Scheitel der Kegelschnitte $\varkappa$.

Das zweite Systhem der Zentralkegelschnitte $\varkappa$ berührt die zur Parabelachse parallelen gemeinsamen Sehnen der zwei konfokalen Parabeln. Ihre zusammengehörigen Berührungssehnen mit der einen Parabel wie auch diejenigen Sehnen der anderen Parabel, welche die Brennpunkte tragen, haben gleichen Abstand von der zur Parabelachse senkrechten gemeinsamen Sehne der zwei Parabeln.

4. Vereinigen sich die zwei konfokalen Zentralkegelschnitte k_m, k_n in einem Kegelschnitt, so ergibt sich die folgende Aufgabe: Man bestimme diejenigen Kegelschnitte $\varkappa$, welche

einen Kegelschnitt k_m doppelt berühren und deren zwei reelle oder konjugiert-imaginäre Brennpunkte auf demselben Kegelschnitt k_m liegen.

Diese Aufgabe ist durch obige Untersuchungen schon gelöst. Die im 1. Punkt betrachteten Kegelschnitte $\varkappa$ verkümmern in zur einen oder anderen Achse senkrechte Sehnen oder Durchmesser des Kegelschnitts k_m, haben also keine Bedeutung. Der Satz des 2. Punktes aber gibt folgenden Satz:

Die ∞^1 Kegelschnitte $\varkappa$, welche einen Zentralkegelschnitt k_m doppelt berühren und auch ihre reellen oder konjugiert-imaginären Brennpunkte auf k_m haben, kann man in drei Systeme zusammenfassen:

Die Kegelschnitte des ersten Systemes berühren k_m in den Endpunkten der zur Hauptachse parallelen Sehnen und auch ihre Brennpunkte sind die Endpunkte solcher Sehnen, ferner liegen die Endpunkte dieser zusammengehörigen Sehnen mit den reellen Brennpunkten des Kegelschnitts auf einem Kreis, endlich berühren diese Kegelschnitte die zwei Leitlinien des Kegelschnitts k_m in ihren ausserhalb der Nebenachse liegenden Scheiteln.

Die Kegelschnitte des zweiten Systemes berühren k_m in den Endpunkten der zur Nebenachse parallelen Sehnen und auch ihre Brennpunkte sind die Endpunkte solcher Sehnen, ferner liegen die Endpunkte zusammengehöriger Sehnen auf einem Kreis, der die reellen Brennpunkte harmonisch trennt, oder anders ausgedrückt: die zusammengehörigen Sehnen trennen die Leitlinien des Kegelschnitts k_m harmonisch. Alle diese Kegelschnitte (die nur Hyperbeln oder imaginäre Kegelschnitte sein können) haben die ausserhalb der Hauptachse liegenden Scheiteln auf den konjugiert-imaginären Leitlinien des Kegelschnitts k_m und berühren dieselben in ihren konjugiert-imaginären Scheiteln.

Das dritte Systhem der Kegelschnitte $\varkappa$ berührt k_m in den Endpunkten ihrer Durchmessern und ihre Brennpunkte sind gleichfalls Endpunkte von Durchmessern, die Tangenten des Kegelschnitts k_m in diesen Endpunkten bilden ein Rechteck, und die Kegelschnitte $\varkappa$ berühren den diesem Rechteck

umschriebenen Kreis (den de la Hire-Kreis des Kegelschnitts k_m).

Von besondern Fällen des Satzes seien hier folgende zwei angeführt:

«Beschreibt man aus einem Scheitel der Nebenachse einer Ellipse als Mittelpunkt den Kreis, der seine Leitlinien berührt, so berührt derselbe auch die Ellipse doppelt, und die Berührungssehne ist die Polare des Krümmungsmittelpunktes jenes Scheitels nach der Ellipse.»

«Die Polare v des Krümmungsmittelpunktes eines Scheitels des Kegelschnitts k ist die Achse eines Kegelschnitts $\varkappa$, welcher k in jenem Scheitel vierfach berührt; diese Achse v trifft die Leitlinien von k in den Scheiteln und den Kegelschnitt selbst in den Brennpunkten des Kegelschnitts $\varkappa$.»

Vereinigen sich die zwei konfokale Parabeln des Satzes unter **3**, so hat man:

Den einen Endpunkt einer Fokalsehne einer Parabel k_m kann man als den Brennpunkt einer Parabel $\varkappa$ betrachten, welche k_m im zweiten Endpunkte der Fokalsehne berührt und deren Scheiteltangente die Leitlinie der Parabel k_m ist.

Die eine der von dieser Leitlinie gleich weit entfernten Sehnen der Parabel k_m trifft diese in reellen, die andere in konjugiert-imaginären Punktpaaren; und es gibt einen Kegelschnitt $\varkappa$, welcher k_m in einem dieser Punktpaaren berührt und dessen Brennpunkte die zwei anderen Punkte sind. Die mit diesen Brennpunkten inzidente Achse des (reellen oder konjugiert-imaginären) Kegelschnitts $\varkappa$ ist gleich dem Parameter der Parabel.

*

5. Die für zwei konfokalen Kegelschnitte gefundenen Sätze sollen jetzt für zwei Kegelschnitte k_m, k_n in allgemeiner Lage bewiesen werden.

Zu dem Ende seien XX_1, YY_1, ZZ_1 die Gegenpunkte des den Kegelschnitten k_m, k_n umschriebenen Vierseits V;

$$X_0 \equiv (YY_1, ZZ_1),\ Y_0 \equiv (ZZ_1, XX_1),\ Z_0 \equiv (XX_1, YY_1)$$

seien die Eckpunkte seines Diagonaldreieckes und (k_m, k_n) bezeichne die dem Vierseit einbeschriebene Kegelschnittschar.

Jedes Gegeneckpunktpaar des Vierseits V ist ein konjugiertes Polenpaar bezüglich der Kegelschnitte desjenigen Büschels, dessen Grundpunkte die zwei anderen Gegeneckpunktpaare sind; also trennen die Kegelschnitte des Büschels das erste Grundpunktpaar harmonisch.

Trifft nun ein beliebiger Kegelschnitt c eines solchen Büschels (z. B. mit den Grundpunkten YY_1ZZ_1) die Diagonale XX_1 in den Punkten AB, so sind die Verbindungsgeraden jener Grundpunkte, somit auch die Verbindungsgeraden aller Punkte des Kegelschnitts c, mit den Punkten A und B stets konjugierte Polaren für alle Kegelschnitte der Schar (k_m, k_n). Der Kegelschnitt c ist daher der Ort der Berührungspunkte der aus dem Punkte A oder B ausstrahlenden Tangenten der Kegelschnitte der Schar.

Also:

«Der Ort der Berührungspunkte der — aus einem Punkte A der Seiten des gemeinsamen Polardreieckes einer Kegelschnittschar — zu den Kegelschnitten der Schar ausstrahlenden Tangenten ist ein Kegelschnitt; dieser beschreibt drei Büschel, deren Grundpunkte je zwei Paar Gegeneckpunkte des der Schar umschriebenen Vierseits sind, wenn der Punkt A die Seiten des gemeinsamen Polardreieckes beschreibt.»

Wir bezeichnen mit MM_1 und NN_1 die Berührungspunkte der aus dem Punkte A der Diagonal XX_1 des Vierseits V zu den diesem einbeschriebenen Kegelschnitten k_m und k_n bezw. ausstrahlenden Tangenten.

Unter den ∞^1 Kegelschnitten z, welche den Kegelschnitt k_m im Punktpaare MM_1 berühren, gibt es einen, der die zwei Geradenpaare berührt, welche die Punkte N, N_1 mit zwei Gegeneckpunkten des Vierseits verbinden.

Ist nämlich $ABXX_1$ ein harmonischer Wurf, so ist der Pol der Geraden AN bezüglich aller Kegelschnitte z der Treffpunkt der Geraden NB, MM_1; also sind AN, BN konjugierte Polaren nach den Kegelschnitten z.

Nachdem nun die Punkte AB auf dem mit den Punkten

$YY_1ZZ_1MM_1NN_1$ inzidenten Kegelschnitt c die Punktpaare YY_1, ZZ_1 und auf der Geraden XX_1 das Punktpaar XX_1 harmonisch trennen, so sind die Geradenpaare NY, NY_1; NZ, NZ_1; NX, NX_1 Tangenten von je einem der Kegelschnitte $\varkappa$. Nimmt man schließlich in Betracht, daß $ABXX_1$ die Polare des Punktes $X_0 \equiv (YY_1, ZZ_1)$ ist in Bezug auf alle Kegelschnitte $\varkappa$, so folgt, daß die Geraden N_1Y, N_1Y_1; N_1Z, N_1Z_1; N_1X, N_1X_1, welche jene vom Punkte X_0 und der Geraden AB harmonisch trennen, die früheren drei Kegelschnitte $\varkappa$ berühren.

Sind NN_1 die Berührungspunkte der aus dem Punkte B (nicht aus A) zu k_n ausstrahlenden Tangenten, dann gibt es unter dem den Kegelschnitt k_m in den Punkten MM_1 berührenden Kegelschnitten $\varkappa$ ebenfalls drei solche, welche die Verbindungsgeraden der Punkte N, N_1 mit den Gegeneckpunktpaaren berühren; denn diese Punkte NN_1 haben ebenfalls auf den Kegelschnitt c — so wie die früheren — die Lage, daß sie das Punktpaar AB harmonisch trennen.

Also:

Nimmt man auf eine Diagonale eines Vierseits ein Punktpaar AB an, welches die Eckpunkte harmonisch trennt und sind MM_1 die Berührungspunkte des aus dem Punkte A zu einem der dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt k_m ausstrahlenden Tangenten, NN_1 die Berührungspunkte der aus dem Punkte A oder B zu einem anderen dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt k_n ausstrahlenden Tangenten: so gibt es immer einen den Kegelschnitt k_m in den Punkten MM_1 berührenden Kegelschnitt $\varkappa$, der auch die vier Geraden berührt, welche die Punkte NN_1 mit irgend zwei Gegeneckpunkten des Vierseits verbindet.

6. Betrachtet man die Doppelpunkte einer Punktinvolution I auf einer Geraden als einen verkümmerten Kegelschnitt, so sind die zugeordneten Punkte dieser Involution konjugierte Pole. Zieht man durch zwei solche Punkte je eine Gerade, so erhält man konjugierte Polaren des verkümmerten Kegelschnitts.

Da nun bekanntlich die gemeinsamen konjugierten Polaren von zwei Kegelschnitten jede Seite des gemeinsamen Polardreieckes derselben in je einer Punktinvolution treffen, so folgt:

«Nimmt man auf einer Seite eines Polardreieckes des Kegelschnitts k eine Involution an, in welcher die beiden Eckpunkte des Polardreieckes zugeordnete Punkte sind, so treffen die mit den zugeordneten Punkten der Involution inzidenten konjugierten Polaren von k auch die zwei übrigen Seiten des Polardreieckes in je einer Involution.»

Als besonderen Fall dieses Satzes hat man:

«Nimmt man auf einer Seite eines Polardreieckes des Kegelschnitts k eine Involution $PP'.QQ'\ldots$ an, der auch die zwei Eckpunkte des Polardreieckes als zugeordnete Punkte angehören, so treffen die aus den Punkten $P, Q, \ldots$ der Involution ausstrahlenden Tangenten des Kegelschnitts k, so wie die Geraden, welche die Berührungspunkte dieser Tangenten mit den zugeordneten Punkten $P', Q'\ldots$ jener Involution verbinden, die zwei anderen Seiten des Polardreieckes ebenfalls in Involutionen.»

Daraus folgt:

«Ist AA' ein veränderliches konjugiertes Polenpaar in Bezug auf den Kegelschnitt k_n auf einer Seite des gemeinsamen Polardreieckes der Kegelschnitte k_m, k_n, und sind MM_1 die Berührungspunkte der aus dem Punkte A zu dem Kegelschnitt k_m ausstrahlenden Tangenten: so treffen die veränderlichen Geraden MA, MA' die zwei Seiten des gemeinsamen Polardreieckes ebenfalls in Involutionen.»

Wir benützen diesen Satz bei dem Beweis des Folgenden:

Führt man aus dem Punkte A der Diagonale XX_1 des den Kegelschnitten k_m, k_n umschriebenen Vierseits $V \equiv XYZX_1Y_1Z_1$ die Tangenten zu den Kegelschnitten k_m und k_n, und sind MM_1, NN_1 deren Berührungspunkte: so wird der Kegelschnitt $\varkappa$, der k_m in den Punkten MM_1 berührt und auch die Geraden NY, NY_1, N_1Y, N_1Y_1 berührt, welche die Punkte NN_1 mit den Gegeneckpunkten Y, Y_1 des Vierseits V verbinden, durch zwei vom Punkte A unabhängigen Punkten der Diagonale YY_1 des Vierseits gehen.

Der Punkt $A' \equiv (NN_1, XX_1)$ ist nämlich der zu A konjugierte Pol von A nach k_n auf der Diagonale $XX_1Y_0Z_0$ des Vierseits, $A'X_0Z_0$ ist ein Polardreieck des Kegelschnitts $\varkappa$, und

die Treffpunkte der Geraden MA, MA' mit der Seite X_0Z_0 dieses Polardreieckes, so wie die Punkte X_0, Z_0 sind konjugierte Pole von $\varkappa$. Es geht daher $\varkappa$ durch die Doppelpunkte der von diesen zwei konjugierten Polen bestimmten Involution, die aber vom Punktpaar AA' unabhängig ist (und durch jedes andere konjugierte Polenpaar des Kegelschnitts k_n auf der Seite $XX_1Y_0Z_0$ des Polardreieckes $X_0Y_0Z_0$ der Kegelschnitte k_m, k_n ersetzt werden kann).

7. *Führt man aus dem Punkte A der Diagonale* XX_1 *des den Kegelschnitten* k_m, k_n *umschriebenen Vierseits* $V \equiv XYZX_1Y_1Z_1$ *die Tangenten zu den Kegelschnitten* k_m *und* k_n, *welche diese in den Punkten* MM_1, NN_1 *berühren: so wird der Kegelschnitt* $\varkappa$, *der* k_m *in den Punkten* MM_1 *berührt und auch die Geraden* NX, NX_1, N_1X, N_1X_1 *berührt, einen Kegelschnitt* k *doppelt berühren, der auch die Geraden* X_0X, X_0X_1 *in den Punkten* X, X_1 *berührt, wenn* $X_0 \equiv (YY_1, ZZ_1)$ *ist.*

Dem Kegelschnitt $\varkappa$ ist ein Vierseit mit den Seiten NX, NX_1, N_1X, N_1X_1 umschrieben, also ist das Diagonaldreieck $A'A''X_0$ des letzteren ein Polardreieck von $\varkappa$. [$A' \equiv (NN_1, XX_1)$, $X_0 \equiv (YY_1, ZZ_1)$].

Die Geraden AM, AM_1 treffen die Seite $A''X_0$ dieses Polardreieckes in den Polen P, P_1 der Geraden $A'M$, $A'M_1$ nach $\varkappa$, und da sowohl die Pole als auch die Polaren vom Punkte X_0 und seiner Polare $A'A''XX_1$ nach $\varkappa$ harmonisch getrennt sind: so gibt es einen Kegelschnitt k, welcher die Geraden X_0X, X_0X_1 in den Punkten X, X_1 berührt, und bezüglich welchen die Polaren der Punkte P, P_1 die Geraden $A'M$, $A'M_1$ sind.

Dieser Kegelschnitt k berührt $\varkappa$ in zwei Punkten der Geraden $A''X_0$, und es sind AM, $A'M$; AM_1, $A'M_1$ gemeinsame konjugierte Polaren der Kegelschnitte k_m, $\varkappa$ und k; und das gemeinsame Polardreieck $X_0Y_0Z_0$ von k_m und k_n ist auch ein Polardreieck des Kegelschnitts k.

Die gemeinsamen konjugierten Polaren der Kegelschnitte k_m, k treffen die Seite Y_0Z_0 des gemeinsamen Polardreieckes $X_0Y_0Z_0$ in einer involutorischen Reihe, deren zugeordnete Punkte Y_0Z_0, AA' sind; diese Reihe ist unabhängig vom Punktpaar

AA', das durch jedes andere konjugierte Polenpaar der Geraden XX_1 bezüglich k_n ersetzt werden kann, w. z. w.

8. *Sind die Gegeneckpunkte XX_1 des den Kegelschnitten k_m, k_n umschriebenen Vierseits $V \equiv XYZX_1Y_1Z_1$ durch die Punkte AB harmonisch getrennt, und bedeuten MM_1 die Berührungspunkte der aus dem Punkte A zu dem Kegelschnitt k_m, NN_1 aber die Berührungspunkte der aus dem Punkte B zu dem Kegelschnitt k_n ausstrahlenden Tangenten: so wird der Kegelschnitt $\varkappa$, der k_m in den Punkten MM_1 berührt und die Geraden NY, NY_1, N_1Y, N_1Y_1 ebenfalls berührt, auch die zwei gemeinsame Sehnen der Kegelschnitte k_m, k_n berühren, die sich in dem Eckpunkte $Z_0 \equiv (XX_1, YY_1)$ ihres gemeinsamen Polardreieckes $X_0Y_0Z_0$ treffen.*

Es sei $B'X_0Z_0$ das Diagonaldreieck des dem Kegelschnitt $\varkappa$ umschriebenen Vierseits mit den Seiten NY, NY_1, N_1Y, N_1Y_1. Die Polare $B'X_0 \equiv v$ des Punktes Z_0 nach $\varkappa$ trifft die aus Z_0 ausstrahlenden zwei Tangenten l, l' in ihren Berührungspunkten mit dem Kegelschnitt $\varkappa$.

Da die Berührungssehne des Kegelschnitts $\varkappa$ mit k_m die Gerade $MM_1 \equiv u$, mit dem Geradenpaar (ll') als Kegelschnitt aber v ist, so werden diese Berührungssehnen (wie allgemein bekannt) durch die in ihrem Treffpunkte $X_0 \equiv (uv)$ zusammenstossenden gemeinsamen Sehnen von k_m und (ll') harmonisch getrennt. Aber diese gemeinsame Sehnen trennen auch die konjugierten Polaren X_0Y_0, X_0Z_0 der Kegelschnitte k_m, k_n harmonisch, also fallen diese gemeinsame Sehnen von k_m und (ll') mit den in X_0 zusammenstossenden gemeinsamen Sehnen der Kegelschnitte k_m, k_n zusammen, und ll' ist daher ebenfalls ein (in Z_0 sich treffendes) gemeinsames Sehnenpaar der Kegelschnitte k_m, k_n.

9. *Sind die Gegeneckpunkte XX_1 des den Kegelschnitten k_m, k_n umschriebenen Vierseits $V \equiv XYZX_1Y_1Z_1$ durch die Punkte harmonisch getrennt und bedeuten MM_1 die Berührungspunkte der aus dem Punkte A zu dem Kegelschnitt k_m, NN_1 aber die Berührungspunkte der aus dem Punkte B zu dem Kegelschnitt k_n ausstrahlenden Tangenten: so wird Kegelschnitt $\varkappa$, der k_m in den Punkten MM_1 berührt und die Geraden NX,*

NX_1, N_1X, N_1X_1 ebenfalls berührt, auch den mit k_m, k_n in einem Büschel liegenden und durch das Punktpaar XX_1 gehenden Kegelschnitt k doppelt berühren.

Das Diagonaldreieck $B'B''X_0$ des dem Kegelschnitt $\varkappa$ umschriebenen Vierseits mit den Seiten NX, NX_1 N_1X, N_1X_1 ist ein Polardreieck desselben, also ist die Polare des Eckpunktes B'' die Gegenseite $NB'N_1 \equiv v$. Ebenso ist v die Polare des Punktes B'' in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa$, der mit den Kegelschnitten k_m, k_n in einem Büschel liegt und die Geraden X_0X, X_0X_1 in den Punkten X, X_1 berührt.

Aber auch die Polare des Punktes N bezüglich der Kegelschnitte k und $\varkappa$ ist dieselbe Gerade. Wir sahen nämlich soeben, daß die Berührungssehnen $MM_1 \equiv u$ und $NN_1 \equiv v$ die sich in X_0 treffenden gemeinsame Sehnen der Kegelschnitte k_m und k_n harmonisch trennen. Darum fällt der zu N konjugierte Pol N' bezüglich der in einem Büschel liegenden Kegelschnitten k_m, k_n und k in den Treffpunkt der Tangente NB mit der Geraden u, und die Polare des auf der Geraden v liegenden Punktes N in Bezug auf k ist die Gerade $B''N'$.

Die Polare des Punktes N' der Berührungssehne u der Kegelschnitte k_m, $\varkappa$ in Bezug auf diese ist die Gerade AN; daher fällt der Pol der Geraden $B''N'$ in Bezug auf $\varkappa$ in den Treffpunkt N der Polaren NN_1 und AN der Punkte B'', bezw. N'.

Die Polare des Punktes N ist also für beide Kegelschnitte k und $\varkappa$ die nämliche Gerade $B''N'$, und weil auch der Punkt N_1 für beide Kegelschnitte die nämliche Polare hat, so berühren sich dieselben in zwei Punkten der Geraden NN_1. Der veränderliche Kegelschnitt $\varkappa$ berührt also den festen Kegelschnitt k in seinen Treffpunkten mit der Polare des auf der Geraden XX_1 veränderlichen Punktes B nach dem Kegelschnitt k_n.

Wir wollen noch eine Eigenschaft dieses Kegelschnitts k hervorheben.

Für k ist ABX_0 ein Polardreieck; also treffen sich die Geraden, welche die zwei Eckpunkte A und X_0 mit den Endpunkten der durch den dritten Eckpunkt B gehenden Sehnen BN, BN_1 verbinden, auf dem Kegelschnitt k. Mit anderen Worten: Die Tangenten AM, AM_1 des Kegelschnitts k_m und die

Tangenten BN, BN_1 des Kegelschnitts k_n bilden die Gegenseiten eines dem Kegelschnitt k einbeschriebenen Viereckes.

Also:

In dem Büschel, dem die zwei Kegelschnitte k_m, k_n angehören, gibt es einen Kegelschnitt k, der durch zwei Gegeneckpunkte XX_1 des den zwei ersten Kegelschnitten umschriebenen Vierseit geht. Diesem Kegelschnitt h kann man ∞^1 Vierecke umschreiben, deren zwei Gegenseiten k_m und die zwei anderen Gegenseiten k_n berühren; die Treffpunkte (A, B) dieser Gegenseiten trennen die Gegeneckpunkte XX_1 harmonisch.

PHILLIPSIT AUS DEN BASALTGESTEINEN DES PLATTENSEEGEBIETES (BALATONGEBIETES).

(Tafel I.)

Von B. MAURITZ.

Vorgelegt der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 8. Okt. 1928.

In den Basaltgesteinen des Plattenseegebietes waren bisher zwei Phillipsitvorkommen bekannt. A. Liffa (1) beschrieb den Phillipsit aus Badacsonytomaj und V. Hulyák (2) denjenigen aus Szigliget.

Während der Untersuchung der Basaltgesteine des Plattenseegebietes traf ich in letzterer Zeit auf zwei neue Zeolithfundstellen.

Im Basaltsteinbruch beim Meierhof Sarvaly bei Sümeg fand ich bisher nur ein einziges Basaltexemplar mit einigen Phillipsitkristallen. In einem Mandelsteinhohlraum von beiläufig acht Zentimeter Durchmesser liess sich ein seitlich aufgewachsener halbdurchsichtiger Phillipsitkristall erkennen; die Länge des Kristalls beträgt acht Millimeter. Derselbe besitzt pseudotetragonalen Habitus mit dem scheinbaren tetragonalen Prisma erster Ordnung und der Pyramide zweiter Ordnung. Die Prismenflächen sind ziemlich glatt, die Pyramidenflächen parallel den Kanten treppenartig parkettiert. Der Prismenwinkel beträgt rund 90°, die Pyramidenflächen bilden miteinander einen Winkel von beiläufig 61°. Die scheinbaren Pyramidenflächen entsprechen den monoklinen Prismenflächen $\{110\}$ und der Winkel $(110).(1\bar{1}0)$ beträgt beim Phillipsit 60° 32′. Die kleineren Kristalle sind von demselben Habitus, nur kann man an einigen die einspringenden Winkel, bzw. die für die Phillipsitvierlinge charakteristischen

Rinnen erkennen. Somit sind sämtliche Kristalle Vierlinge nach den bekannten Zwillingsgesetzen: Zwillingsebene (001) und (011). Spezifisches Gewicht beiläufig 2.2, Härte 4.5. Optisch positiv; optische Axenebene und stumpfe Mittellinie senkrecht zu (010); a : c beiläufig 20° im stumpfen Winkel β; mittlerer Brechungsexponent 1.51. Die Zwillingsgrenze zwischen den Individuen ist meist keine gerade Linie; die Individuen greifen suturenartig ineinander, wie man es am besten an Spaltungslamellen nach $\{010\}$ erkennen kann. Chemisch liess sich in der salzsauren

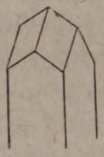


Fig. 1. Phillipsit, Sarvaly.

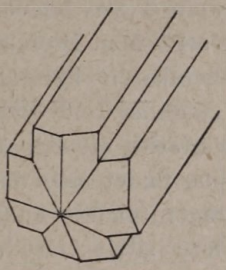


Fig. 2. Phillipsit, Sarvaly.

Lösung der Kristalle Kali, Kalk und Bariterde nachweisen; schätzungsweise beträgt der Kalkgehalt das zehnfache des Baritgehaltes (Fig. 1—4).

Die Wände des Hohlraumes, in welchem die Phillipsitkristallen aufgewachsen sind, wurden mit einem weisslichen schmierigen Zersetzungsprodukt überzogen; dieses liess sich bis jetzt nicht näher bestimmen.

Der zweite Fundort, woselbst der Phillipsit sich in grösserer Menge bildete, befindet sich in einem neueröffneten Steinbruch am Berge Halyagos beim Dorfe Diszel, in der Nachbarschaft des Städtchens Tapolca. Hierselbst fand sich der Phillipsit in vier verschiedenen Typen. Das Mineral bildete sich in Mandelräumen und Gesteinspalten.

Der erste Typus der Phillipsitkristallen wird durch winzige, höchstens 0·2 Millimeter grosse Kristalle repräsentiert; diese sind dicht nebeneinander unmittelbar an den Wänden der Mandelräumen aufgewachsen. Sie sind wasserklar durchsichtig,

stark glasglänzend und formenarm, da sie nur von dem scheinbaren tetragonalen Prisma und der scheinbaren tetragonalen Pyramide begrenzt sind. Unter dem Mikroskop erkennt man mit Hilfe der optischen Untersuchung, dass diese pseudotetragonalen Kristalle Vierlinge monokliner Individuen sind; die optischen Konstanten stimmen mit denen des Phillipsit vollkommen überein. Nur selten erkennt man, dass diese pseudotetragonalen Prismen einander senkrecht durchkreuzend sich zu Vierlingen höherer Ordnung gestalten. Diesen Typus fand ich bisher nur in zwei Hohlräumen (Fig. 5).

Der zweite Typus bildet etwas grössere Komplexe, die Millimeterlänge erreichen. Drei pseudotetragonale Prismen (kombiniert mit der scheinbaren Pyramide zweiter Ordnung) durchdringen senkrecht einander und bilden die zierlichen bekannten Phillipsit-Zwillingsstöcke, die eigentlich aus zwölf Individuen bestehen. Dieser Typus findet sich nur selten und zwar in Hohlräumen, die mit Aragonitnadeln ausgepolstert sind. Die zierlichen Phillipsitkomplexe sitzen fast schwebend an den feinen Aragonitnädelchen und geben einen prachtvollen Anblick (Fig. 6—7).

Der dritte Typus der Phillipsitzwillingsstöcke bildet bis zwei Millimeter grosse Komplexe, die vollkommen einem Rhombendodekaeder ähnlich sind. Die Flächen des scheinbaren Rhombendodekaeder sind den Kanten parallel treppenförmig parkettiert. Das Rhombendodekaeder selbst besteht aus den bekannten zwölffachen Zwillingen der Phillipsitindividuen. Diese rhombendodekaederähnlichen weisslichen Komplexe sitzen in manchen Hohlräumen dicht aneinander gedrängt und überkrusten alle Wände des Hohlraumes. Oft werden sie von spärlichem Kalkspat begleitet. Zuerst bildete sich der Kalkspat, dessen Kristalle eine sehr merkwürdige Ausbildung zeigen, da sie von dem scheinbaren Prisma zweiter Ordnung und einen spitzen Rhomboeder begrenzt sind. Die Flächen der Kalkspatkristalle sind nicht genügend eben, um genaue kristallographische Untersuchungen zu gestatten. Dennoch liess sich folgendes feststellen: Das spitze Rhomboeder, dessen Flächen in der vertikalen Zone abgerundet sind, besitzt die Incides $\{05\bar{5}2\}$; die Rhomboederflächen bilden miteinander einen Winkel von cca 106° (be-

rechnet 106° 45′); das scheinbare Prisma ist nicht das Deuteroprisma $\{11\bar{2}0\}$, sondern die eine Hälfte eines sehr spitzen Skalenoeders, das schon dem Prisma nahesteht. Die Skalenoederflächen bildeten miteinander Winkeln von rund 56°, bzw. 64°; der Prismenwinkel wäre 60°. Die Flächen des Rhomboeders $(05\bar{5}2)$ bilden mit diesen Skalenoederflächen einen Winkel von rund 35°; der Winkel $(05\bar{5}2).(11\bar{2}0)$ wäre 36° 37′. Die Flächen des Spaltungsrhomboeders bilden mit den Skalenoederflächen einen Winkel von rund 58°; der Winkel $(10\bar{1}1).(11\bar{2}0)$ beträgt 52°32′. Diese Kalkspatkristallen erreichen eine Länge von mehreren Millimeter und sitzen aufgewachsen an den Wänden der Hohlräume; die Kruste der scheinbaren Phillipsitrombendodekaeder zieht sich auf diese Kalkspatkristalle hinauf, so dass nur die Rhomboederflächen vollkommen frei sind, aber die Skalenoederflächen halbwegs mit der Kruste bedeckt wurden.

An einem kleinen Handstück erscheinen die rhombendodekaederähnlichen Phillipsitkomplexe nicht in einem Mandelhohlraum, sondern bekleiden die verwitterte Oberfläche einer Kluft. Die Kruste besteht grösstenteils aus den obenerwähnten Kalkspatkristallen und nur spärliche einzelne rhombendodekaederähnliche Phillipsitkomplexe sitzen an diesen Kalkspatkristallen. Nebenbei erkennt man ein glasglänzendes, ziemlich durchsichtiges, kleinkörniges Mineral, das bei näherer Untersuchung sich als Chabasit erwies; mittlerer Brechungsexponent 1.5, optisch positiv einaxig, stellenweise anomal schwach zweiaxig, Doppelbrechung schwach. An einigen Phillipsitkomplexen sitzt der Chabasit in gut ausgebildeten winzigen Kristallen vom Phakolittypus; das Mineral bildet weissliche hexagonale Bipyramiden.

Der vierte Typus des Phillipsitvorkommens errinnert an die fächerförmigen Desminaggregaten. Die Wände eines Hohlraumes wurden mit einer Kruste überzogen, die hauptsächlich aus Kalkspatkörnchen bestehen. An der Kalkspatkruste sitzen in grosser Menge feine Aragonitnädelchen; an den Aragonitnädelchen schweben spärliche zierliche Phillipsitzwölflinge; nebenbei erscheint eine fächerförmige desminartige Gruppe, deren optische Konstanten aber vollkommen mit denen des Phillipsitminerals übereinstimmen (Fig. 8).

Die chemische Untersuchung des Phillipsitminerals von Diszel ergab, dass dasselbe Kali, Kalk und ein wenig Bariterde enthält.

Zuletzt kann noch bemerkt werden, dass manche Hohlräume und Klüfte ausschliesslich mit Aragonitnädelchen ausgefüllt sind. Diese Nädelchen bilden entweder buschige Aggregate oder dichtgedrängte radial- und parallelstrahlige Massen.

Zum Dank bin ich verpflichtet dem Herrn Direktor Karl Berger in Tapolca, der mir im Steinbruch manche Handstücke aufgehoben hatte.

Literatur.

1. A. Liffa: Ein neues Phillipsitvorkommen in Badacsonytomaj. Földtani Közlöny. **1914**. 175.
2. V. Hulyák: Mineralogische Mitteilungen. Phillipsit von Szigliget. Földtani Közlöny. **1903**. 175.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1—2. Phillipsitzwilling. Basaltsteinbruch bei Sümeg.
Fig. 3—4. Dasselbe. Spaltungsplättchen, Nicols +. Vergrösserung 80 ×.
Fig. 5. Phillipsitkriställchen aus den Basaltmandelräumen. Diszel. Vergrösserung 80 ×.
Fig. 6—7. Phillipsit-Zwillingsstock, bestehend aus 12 Individuen. Diszel. Vergrösserung 80 ×.
Fig. 8. Phillipsitbündel. Diszel. Vergrösserung 80 ×.

ERLÄUTERUNGEN DER GESETZMÄSSIGKEITEN IM ABLAUFE DER LEBENSERSCHEINUNGEN LEBENDER WESEN.

Von FRANZ KÖVESSI (Sopron).

(I. Mitteilung.)

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung vom 12. März 1928 durch A. MÁGOCSY-DIETZ, ord. Mitgl. der Akademie.[1]

Die Rolle der aperiodisch gedämpften Schwingungen in den Lebenserscheinungen.

Die Lebewesen haben ausser ihrem Zellenaufbau drei Haupteigenschaften: *Jedes Lebewesen nährt sich, wächst und vermehrt sich.* Neben diesen Eigenschaften gibt es gewisse Nebenerscheinungen, wie z. B. Bewegung, Reaktion auf Reiz, elektrische Erscheinungen, Wärmeproduktion etc. Diese Erscheinungen sind höchstwahrscheinlich miteinander im innigsten Zusammenhange. Die Erforschung dieses Zusammenhanges ist das in der Ferne schwebende Endziel meiner Untersuchungen. Dieser Zusammenhang kann aber so lange nicht aufgedeckt werden, bis wir nicht die Gesetze der Haupteigenschaften und der Nebenerscheinungen, erkannt haben.

Bezüglich des Ablaufes des Wachstumes der Lebewesen oder ihrer Teile, der Zellvermehrung, der Ernährung und des

[1] Ungarisch auszüglich erschienen unter dem Titel: *Az élőlények fejlődése szabályosságának magyarázata. I. közlemény.* Matematikai és Természettudományi Értesítő XLV (1928), S. 652—663. Daselbst auch die Kurze Zusammenfassung in deutscher Sprache unter dem Titel: *Erläuterungen der Gesetzmässigkeiten im Verlaufe der Leben-erscheinungen lebender Wesen.* I. Mitteilung. S. 664.

Ablaufes der Wärmeproduktion sind schon seit langem Messungen vorgenommen worden. Bei den Pflanzen hat HARTING[1] (1845), die ersten Messungen angestellt. Seither gab es unzählige Untersuchungen des Entwicklungsganges der ein- und mehrzelligen Organismen, der Bakterien, Algen, Pilze, Gräser, Bäume, Tiere und Menschen, wobei der zeitliche Ablauf der Längen-, Dicken-, Volumen-, Gewichtszunahme, der Ernährung und der Wärmeproduktion Gegenstand der Untersuchung war. Die gesammelten Daten geben uns ein klares Bild des Ablaufes der untersuchten Lebenserscheinungen und viele Forscher, wie z. B. PFEFFER[2] (1904. II. S. 7—8.), OSTWALD[3] (1908. S. 20, 35.), RIPPEL[4] (1919. S. 170.) etc., fassten die diesbezüglichen Resultate in dem Sinne zusammen, dass der Entwickelungsgang aus inneren Gründen eine *S* förmige Kurve aufweist. Viele Autoren sprechen daher auch kurz von der *S* förmigen Kurve, die man aber richtiger die *Kurve der individuellen oder ontogenetischen Entwicklung* benennen kann.

Die beigefügte Fig. 1 illustriert diesen Ablauf der Entwicklung. Die vollausgezogene Linie zeigt das in verschiedenem Alter einer 150 jährigen Fichte (Picea excelsa Lk.) erreichte Höhenwachstum; die Abscissen zeigen die Jahre und die Ordinaten die Baumhöhe an, auf Grund von R. v. GUTTENBERG's[5] Messungen. Die bisherigen Forschungen beweisen eindeutig,

---

[1] M. G. HARTING: Mikrometrische Untersuchungen über die Entwickelung der Elementarteile des jährlichen Stammes der Dicotylen. Linnaea 1847. Bd. 19. S. 465, 557.

M. G. HARTING. Annales des Sc. nat. Tom. IV. 1845. S. 210—275.

M. G. HARTING: Waarnemingen over der groei van den plantenstengel. 1867.

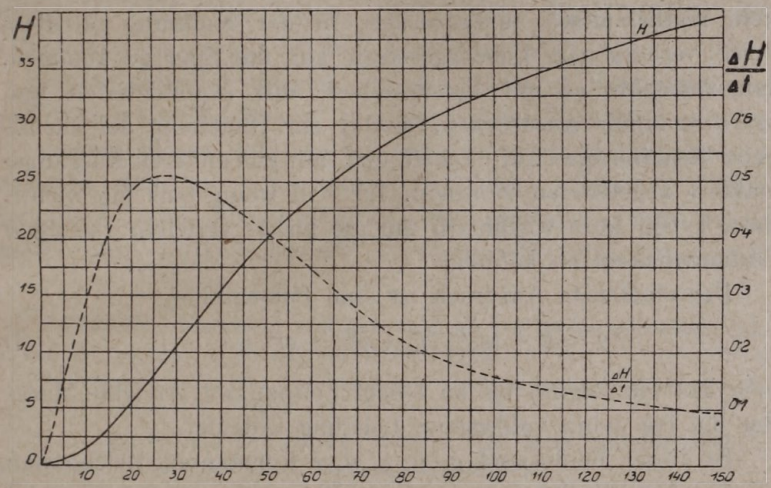
[2] PFEFFER: Pflanzenphysiologie. 2. Aufl. II. Bd. 1901. S. 7—8.

[3] OSTWALD, WOLFGANG: Über die zeitlichen Eigenschaften der Entwicklungsvorgänge. Vorträge u. Aufsätze über Entwicklungsmechanik der Organismen. Herausgegeben von W. Roux. Heft 5. Leipzig. W. Engelmann. 1908. S. 693—694.

[4] A. RIPPEL: Die Wachstumskurve. Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft. Heft. 3. S. 169. Berlin. Bornträger. 1919.

[5] R. v. GUTTENBERG: Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge. Deuticke, Wien u. Leipzig. 1915.

dass die die ontogenetische Entwicklung darstellende Kurve bei jedem Lebewesen, bei jedem Organ, bei jeder Zelle, abgesehen von unbedeutenden Schwankungen, ein ganz ähnliches Bild zeigt: *Erst langsames, dann stürmisches Ansteigen, das Erreichen einer steilsten Stelle, um dann mit abnehmender Steigung abzuflauen, bis zum schliesslichen Stillstand der Entwicklung.*



Figur 1. Das Wachstum einer 150 jährigen Fichte (Picea excelsa Lk.). Die mit voller Linie gezogene Kurve zeigt die Höhe des Baumes an. Diese *S* förmige Kurve entspricht der ontogenetischen Entwicklung des Baumes, die unterbrochene Linie hingegen der Sachs'schen grossen Periode.

Untersuchen wir aber nicht den ontogenetischen Entwicklungsgang der Lebewesen, sondern die sich in der Zeit ergebenden *Veränderungen* in der Entwicklung z. B. der Länge, der Dicke, des Volumens oder im Gewichtswachstum, so bekommen wir eine andere Kurve. Dieses sehr charakteristische Bild des Wachstums können wir aus der Kurve der ontogenetischen Entwicklung berechnen, wenn wir diese in gleiche, kleine Zeitintervalle teilen und dann das Verhältnis bilden zwischen der je einem kleinen Zeitintervall entsprechenden Wachstumsdifferenz und der Zeitdiff. Den Wachstumsgang der Fichte deutet

in der Figur die unterbrochene Linie an. SACHS[1] hat als erster diese Erscheinung erkannt und nannte sie (1873) *die grosse Periode des Wachstums*. (Dieselbe Kurve kennt die Forstwissenschaft unter dem Namen «laufender Zuwachs der Bäume».) Von den beiden Kurven lässt sich jede aus der anderen berechnen.

Den Ablauf der ontogenetischen Entwicklung versuchten Viele mathematisch auszudrücken, in der Hoffnung auf diese Weise verborgenen Lebensgesetzen auf die Spur zu kommen. Man versuchte es mit Potenzreihen, mit exponentialen und logarithmischen Ausdrücken, analog zur Gleichung der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit und mit aus anderen Ausgangspunkten abgeleiteten Formeln. Ich will wenigstens die wichtigeren Typen kurz vorführen, um die bisher erzielten Resultate zusammenfassen zu können.

Der einfachste Ausdruck ist eine Potenzreihe

$$y = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + \cdots \qquad \text{(I)}$$

wo y das von Beginn bis zu einem Zeitpunkt t erreichte Maass oder die bis dahin vollbrachte Leistung bedeutet.

In dieser Reihe sind a, b, c, d, e Konstanten, welche man aus den Versuchsdaten ausrechnet. Wenn man genügend viel Glieder annimmt, so kann man dem Gang der Kurve beliebig nahe kommen.

Manche suchten die Gesetzmässigkeit aus dem Ablauf der Zellteilung ausgehend zu bestimmen. Schon HARTING erkannte (1845) die Gesetzmässigkeit in der Zellvermehrung nach der Formel (l. c. p. 557):

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots 2^t. \qquad \text{(II. 1)}$$

Spätere Forscher nahmen als Ausgangspunkt eine Teilung in k statt in 2 Teile, und setzten wenn y die Zahl der in der Zeit t entstandenen Zellen bedeutet,

$$y = k^t. \qquad \text{(II. 2)}$$

---

[1] SACHS: Jahrbuch f. Wiss. Bot. 1860. Bd. 2. S. 344.
SACHS: Lehrbuch der Botanik. 1873. III. Aufl. S. 726—731. Leipzig, Engelmann.
SACHS: Arbeit d. Würzburger Institut. 1874. Bd. I. 9. 190.

Nach SCHÜEPP[1] liesse sich der Wachstumsvorgang im allgemeinen mit der Formel

$$y = y_0 k^t \qquad \text{(II. 3)}$$

ausdrücken. Hier bedeutet y_0 die bei dem (willkürlichen) Beginn der Zeitrechnung *vorhandene*, y die zu einem Zeitpunkt t *erreichte* Grösse der Länge, der Dicke, des Volumens, des Gewichts, der Zellvermehrung, etc; k ist eine Konstante, die > 1.

Genau dasselbe besagen, nur mit anderen Bezeichnungen die Formeln von BLACKMANN[2] und von EULER—LINDNER[3].

Ausser diesen gibt es in der Litteratur zahlreiche einschlägige Arbeiten von ASKENAY[4] (1880), BASENAU[5] (1895), HEDLUNG[6] (1900), BÜCHNER[7] (1901), STEFANOWSKA[8] (1904), HENRY und BASTIEN[9] (1904), MONNIER[10] (1905), RAHN[11] (1906), GRESSLER[12]

---

[1] SCHÜEPP: Wachstum und Formwechsel des Sprossvegetationspunktes der Angiospermen. Ebenda. 32. S. 328. 1914.

[2] BLACKMANN, V. H.: The compound interest law and plant growth. Annals of botany. 33. S. 353. 1919.

[3] EULER, H. und P. LINDNER: Chemie der Hefe und der alkoholischen Gärung. Leipzig. Akad. Verlagsgesellsch. 1915.

[4] ASKENAY, E.: Über eine neue Methode, um die Verteilung der Wachstumsintensität in wachsenden Teilen zu bestimmen. Verhandl. d. naturh. med. Vereins zu Heidelberg. N. F. 2. S. 70. 1880.

[5] BASENAU, F.: Über die Ausscheidung von Bakterien durch die tätige Milchdrüse und über die sog. bakteriziden Eigenschaften der Milch. Archiv. f. Hygiene. 23. S. 44. 1895.

[6] HEDLUNG, TH.: Über den Zuwachsverlauf bei kugeligen Algen während des Wachstums. Särtryck ur Botenika Studier. Upsala. 1900.

[7] BÜCHNER, E.: Zuwachsgrössen und Wachstumsgeschwindigkeit bei Pflanzen. Dissertation. Leipzig. 1901.

[8] STEFANOWSKA, MICHELINE: Sur la croissance en poids de la souris blanche. C. R. Acad. Sc. 1903. id des végetaux. ibid. 1904.

[9] HENRY, CHR. et L. BASTIEN: Recherches sur la croissance de l'homme ect. C. R. Ass. Franc. Avanc. Sc. 1904.

[10] MONNIER, A.: Les matières minérales et la loi d'accroissement des végétaux. Université Génève. Inst. Botanique. (7) 3. fasc.

[11] RAHN, O.: Über den Einfluss der Stoffwechselprodukte auf das Wachstum der Bakterien. Centralb. f. Bakteriologie. II. Abt. 16. S. 417. 1906.

[12] GRESSLER, P.: Über die Substanzquotienten von Helianthus annuus. Dissertation. Bonn. 1907.

(1907), TERNETZ[1] (1912) etc., die alle ähnliche oder geringe Abweichungen aufweisende analytische Ausdrücke benützten, welche aber alle nur zu Beginn der Entwicklung mit den Versuchsresultaten übereinstimmen. In der zweiten Hälfte der Entwicklung weicht die richtige Entwicklungskurve wesentlich ab von der, die sich nach der Formel ergibt. Dies hat bereits LIEBIG[2] auf Hemmungserscheinungen zurückgeführt.

Meines Wissens war J. LOEB[3] der erste, der 1907 darauf aufmerksam machte, dass die Kurve der chemischen Reaktionsgeschwindigkeit Ähnlichkeit habe mit der S förmigen Kurve der ontogenetischen Entwicklung. Auf Grund dessen versuchte ROBERTSON[4] 1908 die in der Chemie bekannte OSTWALD'sche monomolekulare Reaktionsgeschwindigkeit als Vorbild zu nehmen und den Entwicklungsgang so abzuleiten, dass er die Differenzialgleichung der Reaktionsgeschwindigkeit mit dem Gliede $-k^2y^2$ erweiterte, um dadurch die obenerwähnten Hemmungserscheinungen auszudrücken. Nach Integration der Gleichung erhielt er

$$\log \frac{y}{A-y} = K(t-t_1) \qquad \text{(III)}$$

wo y die vom Lebewesen in der Zeit t erreichte Gewichts- oder

---

[1] TERNETZ, CH.: Beiträge zur Morphologie und Physiologie der Euglena gracilis Klebs. Ebenda. 51. S. 435. 1912.

[2] LIEBIG, J. v.: Die Chemie in ihrer Anwendung auf Agrikultur und Physiologie. 7. Aufl. Braunschweig. 2. Teil: Die Naturgesetze des Feldbaus.

[3] J. LOEB: «Dynamics of Living Matter». New-York. 1902. S. 59. — Biochem. Zeitschr. 2. 1906. p. 34. Adress delivered at the 7. International Zoological Congress. Boston. Aug. 22. 1907. Univ. of. Calif. Publ. 3. (1907). S. 61.

J. LOEB: Vorträge und Aufsätze über Entwicklungsmechanik. Heft. II. Über den chemischen Charakter des Befruchtungsvorganges und seine Bedeutung für die Theorie der Lebenserscheinungeu. Leipzig. 1907.

[4] ROBERTSON, TH.: On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Archiv. f. Entwicklungsmechanik. 25. S. 581. 1907.

ROBERTSON, TH. BR.: Further remarks on the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance. Ebenda. 26. S. 108. 1908.

ROBERTSON, TH. BR.: On the nature of the autokatalyst of growth. Ebenda. 37. S. 508. 1913.

Volumenzunahme, t_1 die Zeit, in der die Entwicklung zur Hälfte abgelaufen ist, A das Endresultat zu Ende der Entwicklung und K eine Konstante bedeutet.

Mittelst dieser Formel berechnete ROBERTSON die Gewichtszunahme während der Entwicklung von Menschen, weissen Mäusen, Kürbissen etc. und konstatierte, dass die Gleichung mit den im Versuch beobachteten Daten ziemlich übereinstimme, woraus er schloss, dass das individuelle Wachstum so verläuft, als wäre es eine autokatalytische Reaktionserscheinung. Die in der zweiten Hälfte der Entwicklungszeit sich ergebenden Abweichungen sucht er auf im weiteren Verlauf des Lebens sich ergebenden Sekundärerscheinungen zurückzuführen. ENRIQUES[1] kritisiert und verwirft die Annahme dieser *Sekundärerscheinungen.*

Von einer Differenzialgleichung von Arrhenius ausgehend kam CARLSON[2] auf im wesentlichen ähnliche Zusammenhänge, wie ROBERTSON. Er erprobte die Richtigkeit seiner Formel an Bakterien und Hefepilzen und fand zu Beginn der Entwicklung die Berechnungen mit dem Experiment gut übereinstimmend. Die gegen Schluss der Entwicklungsperiode sich ergebenden Abweichungen stammen auch nach ihm aus *sekundären Erscheinungen.*

Schliesslich müssen wir MITSCHERLICH[3] erwähnen, der aus einem von den bisherigen gänzlich verschiedenen Punkt ausgehend zur folgenden Formel gelangt:

$$y = A.[1 - e^{-cx}]^n \qquad \text{(IV)}$$

---

[1] ENRIQUES, P.: Wachstum und seine analytische Darstellung. Biol. Ctrbl. XXIX. S. 331. 1909.

[2] CARLSON, T.: Über die Zersetzung von Asparagin durch Bakterien in Gegenwart von freiem Sauerstoff. I. der Verlauf des Oxydationsprozesses. Meedel. fr. K. Vetenskapsakademiens Nobelinstitut. 2. Nr. 10. 1912.

CARLSON, T.: Dasselbe. II. Atmungsquotient und Vergärungsgrad. Ebenda. Nr. 19.

CARLSON, T.: Über Geschwindigkeit und Grösse der Hefevermehrung in Würze. Biochem. Zeitschr. 57. S. 313. 1913.

[3] MITSCHERLICH, E. A.: Das Gesetz des Pflanzenwachstums. Landwirtschaftl. Jahrb. Bd. LXVII. S. 167. 1919.

A bedeutet die von einem Lebewesen höchsterreichbare Entwicklung, y die Entwicklung zu einer beliebigen Zeit, x jeden auf den Lebensvorgang Einfluss übenden «äusseren Wachstumsfaktor», c ist ein Koeffizient, der «Wirkungsfaktor», n ist die Zahl der verschiedenen äusseren Wachstumsfaktoren, $e=2{\cdot}71828$, x ist eine Variable, bedeutet aber nicht die Wachstumszeit, sondern das Zeitintervall, in welchem der Pflanze aus den verschiedenen Wachstumsfaktoren gleiche Mengen zur Verfügung stehen. Diese Zeitintervalle müssen einzeln bestimmt werden und auf Grund dieser Bestimmung sind die Berechnungen anzustellen. Gegen die Mitscherlich'sche Formel erhoben Baule,[1] Rippel[2] u. a. Einsprache, so dass man heute unter den angeführten Formeln noch die Robertson'sche als die entsprechendste ansieht.

Alle angeführten Gleichungen stimmen nur mit dem Anfang der Entwicklung überein. Selbst die Robertson'sche Formel, die verhältnismässig noch die am besten zutreffenden Resultate gibt, weicht im weiteren Verfolg der Entwicklung von den Versuchsresultaten ab, was sowohl Robertson, als auch Carlson und andere mit den im Laufe des Lebens auftretenden *Sekundärerscheinungen* zu erklären versuchen. Diese Sekundärerscheinungen wären ein im Laufe des Lebens sich zeigender und bisher unbekannter Faktor, dessen auch für mich unwahrscheinliche Existenz, angefochten wird. Von allen Gleichungen betont keine den bereits von Liebig[3] *erkannten Hemmungsfaktor und*

---

[1] Baule, B.: Zu Mitscherlichs Gesetz der physiologischen Beziehungen. Landwirtsch. Jahrb. 51. S. 363. 1918.

Baule, B.: Prinzipielle Überlegungen zum Wachstumsgesetz der Pflanzen. Ebenda 54. S. 493. 1920.

Baule, B.: Wirkungsgesetz und Wachstumsgesetz. Ebenda 59. S. 341. 1924.

[2] Rippel: Wachstumsgesetze bei höheren und niederen Pflanzen. Naturwissenschaft und Landwirtschaft. Datterer et Comp. Freising-München. 1925. S. 15—16.

[3] Liebig, J. v.: Die Chemie in ihrer Anwendung auf Agrikultur und Physiologie. 7. Aufl. Braunschweig. 2. Teil: Die Naturgesetze des Feldbaus.

offenbar darum mussten die Forscher die Sekundärerscheinungen annehmen.

Der Kardinalfehler liegt darin, dass die Gleichungen *nicht biophysisch begründet sind.* In der Natur gibt es keine Veränderung, keine Arbeit, ohne Energieverbrauch; Wachstum und Vermehrung der Organismen ist mit Arbeit, also Energieverbrauch verbunden, dieser aber fordert Energieersatz. Der Ersatz wird den lebenden Organismen in Form von Nahrung zur Verfügung gestellt. Also müssen Ernährung, Wachstum und Vermehrung der Organismen auf Basis des Energieumsatzes im engsten Zusammenhange stehen. Über diesen energetischen Zusammenhang geben die oben angeführten Gleichungen kein Bild und sind auch gar nicht geeignet diese Begriffe ausdrücken zu können. *Darum müssen wir von der bisherigen Richtung abweichend, als Basis unserer Untersuchung die biophysische und biochemische Richtung wählen.*

*

Aus den vorausgeschickten Erörterungen sahen wir, dass man bisher den Zusammenhang im Entwicklungsgang der lebenden Organismen aus den Angaben der S förmigen Kurve zu erkennen anstrebte. Mit der zeitlichen Veränderung der ontogenetischen Entwicklung $\lim \triangle S/\triangle t = dS/dt$, welche identisch ist mit der Sachs'schen grossen Periode s des Wachstums, hat sich in der Art, wie ich es im folgenden beabsichtige, meines Wissens noch niemand beschäftigt.

Meine Untersuchungen beruhen auf meiner Erkenntnis, dass *die* Sachs'*sche grosse Periode des Wachstums der Organismen, resp. ihre Kurve die grösste Ähnlichkeit hat mit dem Verlauf jener Kurve, die die aperiodisch gedämpfte harmonische Schwingung zeigt.* Sowohl meine Versuchsergebnisse, als auch meine theoretischen Erwägungen bekräftigen mich in dieser Erkenntnis und daher zog ich auch die Versuchsangaben fremder Forscher in den Bereich meiner Untersuchungen und erreichte damit Beweisgründe, welche meine Annahme noch mehr bestätigen.

Im Folgenden ist es mein Ziel, dass ich zum Beispiele die

grosse Übereinstimmung des nach der Gleichung der aperiodisch gedämpften Schwingung *berechneten* und des im Versuche *gemessenen* Ablaufes der SACHS'schen grossen Periode des Längen-, resp. Dickenwachstums eines Baumes nachweise und zeige, dass die Abweichungen durch die Veränderungen der biologischen Faktoren verursacht werden.

Die gedämpfte Schwingungsbewegung ist eine in der anorganischen Natur wohlbekannte Erscheinung. Die auf sie bezüglichen notwendigen Kenntnisse kann man in jedem beliebigen Lehrbuche der Physik und ihre analytische Ableitung in jedem Lehrbuch der Mechanik lesen.

Die aperiodisch gedämpfte Schwingung entspricht der Differentialgleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -w^2s - 2r\frac{ds}{dt}.$$

Hier bedeutet s die der Zeit t entsprechende Elongation (die wir einer Lebenserscheinung des Lebewesen proportional annehmen); w und r sind Konstanten und befriedigen die Ungleichheit $r^2 > w^2$.

Aus der Differentialgleichung ergibt sich

$$2s = ae^{-(r-m)t} + be^{-(r+m)t} \tag{1}$$

wo $e = 2{\cdot}7182$ die Basis der natürlichen Logarithmen, m die Quadratwurzel von $r^2 - w^2$, endlich a und b ebenfalls Konstanten bedeuten. Zufolge der Ungleichheit $r^2 > w^2$ ist

$$m = \sqrt{r^2 - w^2} \tag{2}$$

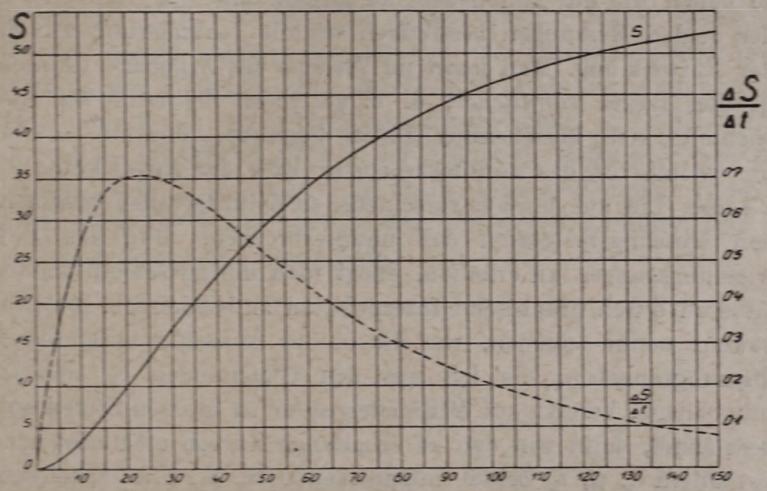
eine reelle Zahl. Die Konstanten w, r, m, a, b sind aus Versuchsdaten zu bestimmen.

Ausser s wird uns auch das Integral

$$2S = 2\int_0^t s\,dt = -\frac{a}{r-m}e^{-(r-m)t} - \frac{b}{r+m}e^{-(r+m)t} + \frac{a}{r-m} + \frac{b}{r+m} \tag{3}$$

beschäftigen.

Fig. 2 zeigt das Bild der durch Formel (1), resp. (3) berechneten aperiodisch gedämpften Schwingung für $r = 0{\cdot}05$, $w = 0{\cdot}04$, $m = 0{\cdot}03$, $a = 3$, $b = -3$. Durch die unterbrochene Linie wird s als Funktion von t dargestellt; durch die voll ausgezogene Linie wird das Integral $S = \int_0^t s dt$ illustriert, dessen Werte ich mit Hilfe der Gleichung (3) und den hier aufgezählten Koeffizienten berechnet habe.



Figur 2. Auf theoretischer Basis berechnete Kurven. Die mit der unterbrochenen Linie gezeichnete Kurve ist mit der (1) Gleichung der aperiodisch gedämpften Schwingung, die vollausgezogene Linie aber mit ihrer Integralgleichung (3) berechnet.

Vergleichen wir nun Fig. 2 mit Fig. 1, so bemerken wir, dass die Kurve der aperiodisch gedämpften Schwingung übereinstimmt mit der Sachs'schen grossen Periode des Wachstums der Lebewesen (Fig. 1), und das Integral der gedämpften Kurve identisch ist mit der S förmigen Kurve der ontogenetischen Entwicklung.

*

Als Beispiel wollen wir mit der aperiodisch gedämpften Schwingung (1), resp. mit der Gleichung (3), die das Längen- und Dickenwachstum betreffenden Grössen eines Baumes untersuchen.

Die zu prüfenden Versuchsdaten beziehen sich auf die den Zeitpunkten t_1, t_2, t_3,... entsprechenden Grössen der S förmigen (3) Kurve. Der Experimentierende pflegt *diese* zu notieren, denn der Entwicklungszustand (Länge, Dicke, Volumen, Gewicht etc.) eines Lebewesens ist leicht messbar und wenn wir irgend eine Entwicklungsänderung, z. B. das Wachstum erkennen wollen, so haben wir nur von neuem zu messen und aus der Differenz der beiden Messungen bestimmen wir die Veränderung $\Delta S/\Delta t$ der Entwicklung. Man kann im Verlaufe des Experimentes nicht in den Besitz *sämtlicher*, d. h. auf *jeden* Zeitpunkt der Entwicklung sich beziehenden Daten kommen, obwohl es für uns wichtig ist das ununterbrochene Bild der Entwicklung zu kennen. Um aus den aus verschiedenen Zeitintervallen stammenden Messungsresultaten das ununterbrochene Bild des Entwicklungsganges zu erhalten, pflegt man die zwischenliegenden Grössen durch graphische Interpolation zu bestimmen. Ich habe sowohl meine eigenen, wie die in der Litteratur auffindbaren Messungsangaben, die ich mit den Gleichungen (1) und (3) untersuchte, vorerst auf Millimeterpapier in grossen Stufen aufgezeichnet, dann von den so erhaltenen Kurven möglichst nahe gewählten t_1, t_2, t_3 Zeiten entsprechende S_1, S_2, S_3... abgelesen, sie in Tabellen eingetragen und dann ihre Differenzen berechnet. Die Ungleichmässigkeiten, die sich zeigten, glich ich entsprechend aus und so erhielt ich zu jedem Zeitintervall $t_2-t_1=\Delta t$ die entsprechende Entwicklungsgrösse $S_2-S_1=\Delta S$, aus der ich dann

$$\frac{S_2-S_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{4}$$

bestimmen konnte. Diesen Wert trug ich dann in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und erhielt die der Sachs'schen grossen Periode entsprechende Kurve.

Die auf die möglichst kleine Δt Zeit (im Prinzipe auf $\lim \Delta S/\Delta t=dS/dt$) bezüglichen Daten benützte ich dann bei

meinen weiteren Untersuchungen zur Berechnung der Koeffizienten r, m, w, a, b.

*

Die zu untersuchenden Daten beziehen sich auf das Wachstum der Fichte (Picea excelsa). Ich will das Längen- und Dickenwachstum dieses Baumes auf Grund der GUTTENBERG'schen Messungen (l. c. S. 149. Tafel XX.) prüfen. GUTTENBERG führte diese Messungen in den Fichtenwäldern von Paneveggio in Süd-Tirol aus. In der I. Tabelle sind die Mittelwerte zahlreicher Messungen auf bestem Boden gewachsener 200 jähriger Fichten gegeben. In der 2. Rubrik der I. Tabelle sind unter der Bezeichnung «H gemessen» die von GUTTENBERG angegebenen, in 10 jährigen Intervallen erhaltenen *Höhen* der Fichte in Metern. Dieselben Grössen sind in der Fig. 3 in voller Linie aufgezeichnet und die so erhaltene Linie ist identisch mit der S förmigen Kurve der ontogenetischen Entwicklung.

I. Tabelle.

Wachstumgang der Fichte *(Picea excelsa L. k.)* der Mittelstämme bester Standortklasse in Paneveggio nach der Berechnung und Ausgleichung der Mittelwerte nach R. v. GUTTENBERG (s. 149. Tafel XX.).

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		H m	D cm			$d = \triangle D / \triangle t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
0·0	—	0·0000	—	—	0·000	—	—	0·0	—	—	0·000
0·5	—	—	0·0185	—0·1174	—	—	—	—	0·0261	—0·2417	—
1·0	—	0·0185	—	—	—0·117	—	—	0·0261	—	—	—0·242
1·5	—	—	0·0368	—0·0672	—	—	—	—	0·0518	—0·1507	—
2·0	—	0·0553	—	—	—0·165	—	—	0·0779	—	—	—0·393
2·5	—	—	0·0548	—0·0215	—	—	—	—	0·0771	—0·0696	—
3·0	—	0·1101	—	—	—0·207	—	—	0·1550	—	—	—0·463
3·5	—	—	0·0724	0·0200	—	—	—	—	0·1020	0·0026	—
4·0	—	0·1825	—	—	—0·187	—	—	0·2570	—	—	—0·461
4·5	—	—	0·0896	0·0577	—	—	—	—	0·1265	—0·0666	—
5·0	—	0·2721	—	—	—0·129	—	—	0·3835	—	—	—0·395
5·5	—	—	1·1064	0·0918	—	—	—	—	0·1504	0·1235	—
6·0	—	0·3785	—	—	—0·038	—	—	0·5339	—	—	—0·278
6·5	—	—	0·1227	0·1227	—	—	—	—	0·1739	0·1739	—
7·0	—	0·5012	—	—	0·085	—	—	0·7078	—	—	—0·098
7·5	—	—	0·1386	0·1506	—	—	—	—	0·1968	0·2186	—
8·0	—	0·6398	—	—	0·235	—	—	0·9046	—	—	0·121
8·5	—	—	0·1539	0·1759	—	—	—	—	0·2191	0·2580	—
9·0	—	0·7937	—	—	0·411	—	—	1·1237	—	—	0·387
9·5	—	—	0·1689	0·1986	—	—	—	—	0·2409	0·2928	—
10·0	—	0·9626	—	—	0·609	—	—	1·3646	—	—	0·671
10·5	—	—	0·1834	0·2190	—	—	—	—	0·2623	0·3233	—
11·0	—	1·1460	—	—	0·828	—	—	1·6269	—	—	0·998
11·5	—	—	0·1974	0·2375	—	—	—	—	0·2832	0·3502	—
12·0	—	1·3434	—	—	1·065	—	—	1·9101	—	—	1·344
12·5	—	—	0·2109	0·2539	—	—	—	—	0·3034	0·3737	—
13·0	—	1·5543	—	—	1·320	—	—	2·2135	—	—	1·718
13·5	—	—	0·2239	0·2687	—	—	—	—	0·3229	0·3942	—
14·0	—	1·7782	—	—	1·589	—	—	2·5364	—	—	2·112
14·5	—	—	0·2364	0·2818	—	—	—	—	0·3414	0·4120	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \Delta H / \Delta t$		H m	D cm			$d = \Delta D / \Delta t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
15·0	—	2·0146	—	—	1·870	—	—	2·8778	—	—	2·524
15·5	—	—	0·2484	0·2935	—	—	—	—	0·3592	0·4274	—
16·0	—	2·2630	—	—	2·163	—	—	3·2370	—	—	2·951
16·5	—	—	0·2599	0·3038	—	—	—	—	0·3762	0·4406	—
17·0	—	2·5229	—	—	2·467	—	—	3·6132	—	—	3·397
17·5	—	—	0·2709	0·3129	—	—	—	—	0·3925	0·4519	—
18·0	—	2·7938	—	—	2·780	—	—	4·0057	—	—	3·844
18·5	—	—	0·2811	0·3209	—	—	—	—	0·4078	0·4615	—
19·0	—	3·0749	—	—	3·101	—	—	4·4135	—	—	5·305
19·5	—	—	0·2905	0·3278	—	—	—	—	0·4221	0·4695	—
20·0	3·00	3·3654	—	—	3·428	3·00	4·90	4·8356	—	—	4·782
20·5	—	—	0·2992	0·3338	—	—	—	—	0·4354	0·4762	—
21·0	—	3·6646	—	—	3·762	—	—	5·2710	—	—	5·251
21·5	—	—	0·3072	0·3390	—	—	—	—	0·4475	0·4816	—
22·0	—	3·9718	—	—	4·101	—	—	5·7185	—	—	5·732
22·5	—	—	0·3145	0·3434	—	—	—	—	0·4584	0·4858	—
23·0	—	4·2863	—	—	4·445	—	—	6·1769	—	—	6·218
23·5	—	—	0·3212	0·3471	—	—	—	—	0·4681	0·4892	—
24·0	—	4·6075	—	—	4·791	—	—	6·6450	—	—	6·707
24·5	—	—	0·3272	0·3501	—	—	—	—	0·4764	0·4916	—
25·0	—	4·9347	—	—	5·142	—	—	7·1214	—	—	7·199
25·5	—	—	0·3325	0·3526	—	—	—	—	0·4828	0·4932	—
26·0	—	5·2672	—	—	5·494	—	—	7·6042	—	—	7·697
26·5	—	—	0·3371	0·3545	—	—	—	—	0·4873	0·4942	—
27·0	—	5·6043	—	—	5·849	—	—	8·0915	—	—	8·136
27·5	—	—	0·3411	0·3559	—	—	—	—	0·4902	0·4945	—
28·0	—	5·9454	—	—	6·204	—	—	8·5817	—	—	8·685
28·5	—	—	0·3445	0·3568	—	—	—	—	0·4919	0·4943	—
29·0	—	6·2899	—	—	6·561	—	—	9·0736	—	—	9·146
29·5	—	—	0·3473	0·3574	—	—	—	—	0·4924	0·4936	—
30·0	6·30	6·6372	—	—	6·918	8·00	9·90	9·5660	—	—	9·668
30·5	—	—	0·3495	0·3575	—	—	—	—	0·4924	0·4924	—
31·0	—	6·9867	—	—	7·276	—	—	10·0584	—	—	10·161
31·5	—	—	0·3513	0·3574	—	—	—	—	0·4916	0·4909	—
32·0	—	7·3380	—	—	7·633	—	—	10·5500	—	—	10·652
32·5	—	—	0·3527	0·3569	—	—	—	—	0·4898	0·4890	—
33·0	—	7·6970	—	—	7·990	—	—	11·0398	—	—	11·141
33·5	—	—	0·3536	0·3562	—	—	—	—	0·4878	0·4869	—
34·0	—	8·0443	—	—	8·347	—	—	11·5276	—	—	11·627
34·5	—	—	0·3540	0·3552	—	—	—	—	0·4856	0·4844	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		H m	D cm			$d = \triangle D / \triangle t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
35·0	—	8·3983	—	—	8·702	—	—	12·0132	—	—	12·113
35·5	—	—	0·3540	0·3540	—	—	—	—	0·4833	0·4817	—
36·0	—	8·7523	—	—	9·056	—	—	12·4965	—	—	12·594
36·5	—	—	0·3538	0·3526	—	—	—	—	0·4808	0·4789	—
37·0	—	9·1061	—	—	9·408	—	—	12·973	—	—	13·072
37·5	—	—	0·3533	0·3510	—	—	—	—	0·4782	0·4758	—
38·0	—	9·4594	—	—	9·759	—	—	13·4555	—	—	13·548
38·5	—	—	0·3525	0·3492	—	—	—	—	0·4755	0·4726	—
39·0	—	9·8119	—	—	10·109	—	—	13·9310	—	—	14·021
39·5	—	—	0·3515	0·3473	—	—	—	—	0·4726	0·4693	—
40·0	10·00	10·1634	—	—	10·455	13·00	14·90	14·4036	—	—	14·490
40·5	—	—	0·3500	0·3452	—	—	—	—	0·4696	0·4657	—
41·0	—	10·5134	—	—	10·801	—	—	14·8732	—	—	14·956
41·5	—	—	0·3483	0·3431	—	—	—	—	0·4665	0·4622	—
42·0	—	10·8617	—	—	11·144	—	—	15·3397	—	—	15·418
42·5	—	—	0·3464	0·3408	—	—	—	—	0·4633	0·4586	—
43·0	—	11·2081	—	—	11·485	—	—	15·8030	—	—	15·877
43·5	—	—	0·3444	0·3384	—	—	—	—	0·4600	0·4549	—
44·0	—	11·5525	—	—	11·823	—	—	16·2630	—	—	16·331
44·5	—	—	0·3422	0·3359	—	—	—	—	0·4566	0·4511	—
45·0	—	11·8947	—	—	12·159	—	—	16·7196	—	—	16·783
45·5	—	—	0·3398	0·3334	—	—	—	—	0·4531	0·4472	—
46·0	—	12·2345	—	—	12·492	—	—	17·1727	—	—	17·230
46·5	—	—	0·3373	0·3308	—	—	—	—	0·4495	0·4434	—
47·0	—	12·5718	—	—	12·823	—	—	17·6222	—	—	17·673
47·5	—	—	0·3346	0·3282	—	—	—	—	0·4458	0·4395	—
48·0	—	12·9064	—	—	13·151	—	—	18·0680	—	—	18·113
48·5	—	—	0·3319	0·3255	—	—	—	—	0·4420	0·4355	—
49·0	—	13·2383	—	—	13·477	—	—	18·5100	—	—	18·548
49·5	—	—	0·3292	0·3227	—	—	—	—	0·4381	0·4316	—
50·0	13·60	13·5675	—	—	13·799	17·60	19·50	18·9481	—	—	18·980
50·5	—	—	0·3264	0·3199	—	—	—	—	0·4341	0·4276	—
51·0	—	13·8939	—	—	14·119	—	—	19·3822	—	—	19·407
51·5	—	—	0·3236	0·3171	—	—	—	—	0·4301	0·4236	—
52·0	—	14·2175	—	—	14·436	—	—	19·8123	—	—	19·831
52·5	—	—	0·3207	0·3143	—	—	—	—	0·4261	0·4197	—
53·0	—	14·5382	—	—	14·751	—	—	20·2384	—	—	20·251
53·5	—	—	0·3177	0·3114	—	—	—	—	0·4222	0·4158	—
54·0	—	14·8559	—	—	15·062	—	—	20·6606	—	—	20·667
54·5	—	—	0·3146	0·3086	—	—	—	—	0·4183	0·4118	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		H cm	D cm			$d = \triangle D / \triangle t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
55·0	—	15·1705	—	—	15·370	—	—	21·0789	—	—	21·078
55·5	—	—	0·3114	0·3057	—	—	—	—	0·4144	0·4079	—
56·0	—	15·4819	—	—	15·676	—	—	21·4933	—	—	21·486
56·5	—	—	0·3081	0·3028	—	—	—	—	0·4105	0·4040	—
57·0	—	15·7900	—	—	15·979	—	—	21·9038	—	—	21·890
57·5	—	—	0·3047	0·2999	—	—	—	—	0·4067	0·4001	—
58·0	—	16·0947	—	—	16·279	—	—	22·3105	—	—	22·290
58·5	—	—	0·3012	0·2970	—	—	—	—	0·4029	0·3962	—
59·0	—	16·3959	—	—	16·576	—	—	22·7134	—	—	22·686
59·5	—	—	0·2978	0·2941	—	—	—	—	0·3991	0·3923	—
60·0	16·90	16·6937	—	—	16·870	21·60	23·50	23·1125	—	—	23·079
60·5	—	—	0·2944	0·2912	—	—	—	—	0·3953	0·3884	—
61·0	—	16·9881	—	—	17·161	—	—	23·5078	—	—	23·467
61·5	—	—	0·2911	0·2883	—	—	—	—	0·3915	0·3846	—
62·0	—	17·2792	—	—	17·450	—	—	23·8993	—	—	23·852
62·5	—	—	0·2878	0·2855	—	—	—	—	0·3877	0·3808	—
63·0	—	17·5670	—	—	17·735	—	—	24·2870	—	—	24·232
63·5	—	—	0·2845	0·2826	—	—	—	—	0·3839	0·3770	—
64·0	—	17·8515	—	—	18·013	—	—	24·6709	—	—	24·609
64·5	—	—	0·2813	0·2798	—	—	—	—	0·3801	0·3733	—
65·0	—	18·1328	—	—	18·297	—	—	25·0510	—	—	24·983
65·5	—	—	0·2782	0·2769	—	—	—	—	0·3763	0·3696	—
66·0	—	18·4110	—	—	18·574	—	—	25·4273	—	—	25·352
66·5	—	—	0·2752	0·2741	—	—	—	—	0·3725	0·3659	—
67·0	—	18·6862	—	—	18·848	—	—	25·7998	—	—	25·718
67·5	—	—	0·2722	0·2713	—	—	—	—	0·3687	0·3622	—
68·0	—	18·9584	—	—	19·120	—	—	26·1685	—	—	26·080
68·5	—	—	0·2693	0·2685	—	—	—	—	0·3649	0·3586	—
69·0	—	19·2277	—	—	19·388	—	—	26·5334	—	—	26·439
69·5	—	—	0·2644	0·2657	—	—	—	—	0·3611	0·3550	—
70·0	19·90	19·4941	—	—	19·653	25·10	27·00	26·8945	—	—	26·794
70·5	—	—	0·2636	0·2629	—	—	—	—	0·3573	0·3514	—
71·0	—	19·7577	—	—	19·917	—	—	27·2518	—	—	27·145
71·5	—	—	0·2608	0·2602	—	—	—	—	0·3535	0·3479	—
72·0	—	20·0185	—	—	20·177	—	—	27·6053	—	—	27·493
72·5	—	—	0·2581	0·2575	—	—	—	—	0·3497	0·3444	—
73·0	—	20·2766	—	—	20·434	—	—	27·9550	—	—	27·838
73·5	—	—	0·2554	0·2548	—	—	—	—	0·3459	0·3409	—
74·0	—	20·5320	—	—	20·689	—	—	28·3009	—	—	28·179
74·5	—	—	0·2528	0·2521	—	—	—	—	0·3421	0·3375	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		H m	D cm			$d = \triangle D / \triangle t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
75·0	—	20·7848	—	—	20·941			28·6430	—	—	28·516
75·5	—	—	0·2502	0·2494	—	—	—	—	0·3383	0·3340	—
76·0	—	21·0350	—	—	21·192	—	—	28·9813	—	—	28·850
76·5	—	—	0·2477	0·2468	—	—	—	—	0·3345	0·3307	—
77·0	—	21·2827	—	—	21·437	—	—	29·3158	—	—	29·181
77·5	—	—	0·2453	0·2442	—	—	—	—	0·3307	0·3273	—
78·0	—	21·5280	—	—	21·681	—	—	29·6465	—	—	29·508
78·5	—	—	0·2429	0·2416	—	—	—	—	0·3269	0·3240	—
79·0	—	21·7709	—	—	21·923	—	—	29·9734	—	—	29·832
79·5	—	—	0·2406	0·2390	—	—	—	—	0·3231	0·3207	—
80·0	22·50	22·0115	—	—	22·162	28·20	30·10	30·2965	—	—	30·152
80·5	—	—	0·2383	0·2369	—	—	—	—	0·3193	0·3174	—
81·0	—	22·2498	—	—	22·399	—	—	30·6158	—	—	30·470
81·5	—	—	0·2360	0·2340	—	—	—	—	0·3155	0·3142	—
82·0	—	22·4858	—	—	22·633	—	—	30·9313	—	—	30·784
82·5	—	—	0·2337	0·2315	—	—	—	—	0·3117	0·3110	—
83·0	—	22·7195	—	—	22·864	—	—	31·2430	—	—	31·095
83·5	—	—	0·2314	0·2290	—	—	—	—	0·3079	0·3079	—
84·0	—	22·9509	—	—	23·093	—	—	31·5509	—	—	31·403
84·5	—	—	0·2291	0·2265	—	—	—	—	0·3041	0·3048	—
85·0	—	23·1800	—	—	23·320	—	—	31·8550	—	—	31·708
85·5	—	—	0·2269	0·2236	—	—	—	—	0·3004	0·3017	—
86·0	—	23·4069	—	—	23·544	—	—	32·1554	—	—	32·009
86·5	—	—	0·2247	0·2217	—	—	—	—	0·2967	0·2986	—
87·0	—	23·6316	—	—	23·765	—	—	32·4521	—	—	32·308
87·5	—	—	0·2225	0·2193	—	—	—	—	0·2931	0·2948	—
88·0	—	23·8541	—	—	23·990	—	—	32·7452	—	—	32·604
88·5	—	—	0·2203	0·2170	—	—	—	—	0·2895	0·2925	—
89·0	—	24·0744	—	—	24·202	—	—	33·0347	—	—	32·896
89·5	—	—	0·2181	0·2146	—	—	—	—	0·2860	0·2896	—
90·0	24·80	24·2925	—	—	24·416	30·90	32·80	33·3207	—	—	33·186
90·5	—	—	0·2159	0·2123	—	—	—	—	0·2825	0·2866	—
91·0	—	24·5084	—	—	24·628	—	—	33·6032	—	—	33·480
91·5	—	—	0·2137	0·2100	—	—	—	—	0·2791	0·2836	—
92·0	—	24·7221	—	—	24·838	—	—	33·8823	—	—	33·756
92·5	—	—	0·2116	0·2078	—	—	—	—	0·2757	0·2808	—
93·0	—	24·9337	—	—	25·046	—	—	34·1580	—	—	34·037
93·5	—	—	0·2095	0·2055	—	—	—	—	0·2724	0·2779	—
94·0	—	25·1432	—	—	25·251	—	—	34·4304	—	—	34·315
94·5	—	—	0·2074	0·2033	—	—	—	—	0·2691	0·2751	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \Delta H / \Delta t$		H m	D cm			$d = \Delta D / \Delta t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
95·0	—	25·3506	—	—	25·455	—	—	34·6995	—	—	34·590
95·5	—	—	0·2053	0·2011	—	—	—	—	0·2659	0·2722	—
96·0	—	25·5559	—	—	25·656	—	—	34·9654	—	—	34·862
96·5	—	—	0·2032	0·1989	—	—	—	—	0·2627	0·2695	—
97·0	—	25·7591	—	—	25·855	—	—	35·2281	—	—	35·132
97·5	—	—	0·2011	0·1968	—	—	—	—	0·2596	0·2668	—
98·0	—	25·9602	—	—	26·052	—	—	35·4877	—	—	35·399
98·5	—	—	0·1990	0·1947	—	—	—	—	0·2565	0·2641	—
99·0	—	26·1592	—	—	26·247	—	—	35·7442	—	—	35·663
99·5	—	—	0·1970	0·1926	—	—	—	—	0·2535	0·2614	—
100·0	26·80	26·3562	—	—	26·439	33·40	35·30	35·9977	—	—	35·924
100·5	—	—	0·1950	0·1904	—	—	—	—	0·2505	0·2587	—
101·0	—	26·5512	—	—	26·630	—	—	36·2482	—	—	36·183
101·5	—	—	0·1930	0·1884	—	—	—	—	0·2476	0·2561	—
102·0	—	26·7442	—	—	26·818	—	—	36·4958	—	—	36·439
102·5	—	—	0·1910	0·1864	—	—	—	—	0·2447	0·2535	—
103·0	—	26·9352	—	—	27·005	—	—	36·7405	—	—	36·692
103·5	—	—	0·1890	0·1844	—	—	—	—	0·2419	0·2509	—
104·0	—	27·1242	—	—	27·189	—	—	36·9824	—	—	36·943
104·5	—	—	0·1871	0·1824	—	—	—	—	0·2391	0·2483	—
105·0	—	27·3113	—	—	27·371	—	—	37·2215	—	—	37·191
105·5	—	—	0·1852	0·1804	—	—	—	—	0·2364	0·2458	—
106·0	—	27·4965	—	—	27·551	—	—	37·4579	—	—	37·437
106·5	—	—	0·1833	0·1784	—	—	—	—	0·2337	0·2433	—
107·0	—	27·6798	—	—	27·730	—	—	37·6916	—	—	37·681
107·5	—	—	0·1814	0·1765	—	—	—	—	0·2311	0·2408	—
108·0	—	27·8612	—	—	27·906	—	—	37·9227	—	—	37·921
108·5	—	—	0·1797	0·1746	—	—	—	—	0·2285	0·2383	—
109·0	—	28·0407	—	—	28·081	—	—	38·1512	—	—	38·160
109·5	—	—	0·1777	0·1727	—	—	—	—	0·2260	0·2359	—
110·0	28·50	28·2184	—	—	28·253	35·70	37·60	38·3772	—	—	38·406
110·5	—	—	0·1759	0·1703	—	—	—	—	0·2235	0·2342	—
111·0	—	28·3943	—	—	28·424	—	—	38·6007	—	—	38·629
111·5	—	—	0·1741	0·1690	—	—	—	—	0·2211	0·2311	—
112·0	—	28·5684	—	—	28·593	—	—	38·8218	—	—	38·860
112·5	—	—	0·1723	0·1671	—	—	—	—	0·2187	0·2288	—
113·0	—	28·7407	—	—	28·761	—	—	39·0405	—	—	39·089
113·5	—	—	0·1705	0·1653	—	—	—	—	0·2164	0·2264	—
114·0	—	28·9112	—	—	28·926	—	—	39·2569	—	—	39·315
114·5	—	—	0·1687	0·1635	—	—	—	—	0·2141	0·2241	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		H m	D cm			$d = \triangle D / \triangle t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
115·0	—	29·0799	—	—	29·089	—	—	39·4710	—	—	39·539
115·5	—	—	0·1669	0·1617	—	—	—	—	0·2119	0·2218	—
116·0	—	29·2468	—	—	29·251	—	—	30·6829	—	—	39·761
116·5	—	—	0·1651	0·1600	—	—	—	—	0·2097	0·2196	—
117·0	—	29·4119	—	—	29·411	—	—	39·8926	—	—	39·980
117·5	—	—	0·1633	0·1582	—	—	—	—	0·2075	0·2173	—
118·0	—	29·5752	—	—	29·569	—	—	40·1001	—	—	40·198
118·5	—	—	0·1616	0·1565	—	—	—	—	0·2054	0·2151	—
119·0	—	29·7368	—	—	29·726	—	—	40·3055	—	—	40·413
119·5	—	—	0·1599	0·1548	—	—	—	—	0·2033	0·2129	—
120·0	30·00	29·8967	—	—	29·880	37·80	39·70	40·5088	—	—	40·626
120·5	—	—	0·1582	0·1531	—	—	—	—	0·2012	0·2107	—
121·0	—	30·0549	—	—	30·034	—	—	40·7100	—	—	40·837
121·5	—	—	0·1565	0·1515	—	—	—	—	0·1991	0·2086	—
122·0	—	30·2114	—	—	30·185	—	—	41·9091	—	—	41·046
122·5	—	—	0·1548	0·1498	—	—	—	—	0·1970	0·2064	—
123·0	—	30·3662	—	—	30·335	—	—	41·1061	—	—	41·252
123·5	—	—	0·1531	0·1482	—	—	—	—	0·1950	0·2044	—
124·0	—	30·5193	—	—	30·483	—	—	41·3011	—	—	41·456
124·5	—	—	0·1515	0·1466	—	—	—	—	0·1930	0·2023	—
125·0	—	30·6708	—	—	30·630	—	—	41·4941	—	—	41·659
125·5	—	—	0·1499	0·1450	—	—	—	—	0·1910	0·2002	—
126·0	—	30·8207	—	—	30·774	—	—	41·6851	—	—	41·859
126·5	—	—	0·1483	0·1434	—	—	—	—	0·1890	0·1982	—
127·0	—	30·9690	—	—	30·918	—	—	41·8741	—	—	42·057
127·5	—	—	0·1467	0·1419	—	—	—	—	0·1870	0·1962	—
128·0	—	31·1157	—	—	31·060	—	—	42·0611	—	—	42·253
128·5	—	—	0·1451	0·1403	—	—	—	—	0·1850	0·1941	—
129·0	—	31·2608	—	—	31·200	—	—	42·2461	—	—	42·447
129·5	—	—	0·1435	0·1388	—	—	—	—	0·1831	0·1922	—
130·0	31·40	31·4043	—	—	31·339	39·80	41·70	42·4292	—	—	42·640
130·5	—	—	0·1419	0·1372	—	—	—	—	0·1812	0·1902	—
131·0	—	31·5462	—	—	31·476	—	—	42·6104	—	—	42·830
131·5	—	—	0·1404	0·1358	—	—	—	—	0·1793	0·1883	—
132·0	—	31·6866	—	—	31·612	—	—	42·7897	—	—	42·917
132·5	—	—	0·1389	0·1343	—	—	—	—	0·1775	0·1864	—
133·0	—	31·8255	—	—	31·746	—	—	42·9672	—	—	43·205
133·5	—	—	0·1374	0·1329	—	—	—	—	0·1757	0·1844	—
134·0	—	31·9629	—	—	31·879	—	—	43·1429	—	—	43·389
134·5	—	—	0·1359	0·1314	—	—	—	—	0·1740	0·1826	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \Delta H / \Delta t$		H m	D cm			$d = \Delta D / \Delta t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
135·0	—	32·0988	—	—	32·011	—	—	43·3169	—	—	43·572
135·5	—	—	0·1345	0·1300	—	—	—	—	0·1723	0·1807	—
136·0	—	32·2333	—	—	32·141	—	—	43·4892	—	—	43·752
136·5	—	—	0·1331	0·1286	—	—	—	—	0·1707	0·1789	—
137·0	—	32·3664	—	—	32·269	—	—	43·6599	—	—	43·931
137·5	—	—	0·1317	0·1272	—	—	—	—	0·1691	0·1770	—
138·0	—	32·4981	—	—	32·396	—	—	43·8290	—	—	44·108
138·5	—	—	0·1303	0·1258	—	—	—	—	0·1676	0·1752	—
139·0	—	32·6284	—	—	32·522	—	—	43·9966	—	—	44·283
139·5	—	—	0·1289	0·1244	—	—	—	—	0·1661	0·1734	—
140·0	32·70	32·7573	—	—	32·646	41·70	43·60	44·1627	—	—	44·457
140·5	—	—	0·1276	0·1230	—	—	—	—	0·1647	0·1716	—
141·0	—	32·8849	—	—	32·769	—	—	44·3274	—	—	44·682
141·5	—	—	0·1263	0·1217	—	—	—	—	0·1633	0·1699	—
142·0	—	33·0112	—	—	32·891	—	—	44·4907	—	—	44·798
142·5	—	—	0·1250	0·1204	—	—	—	—	0·1620	0·1682	—
143·0	—	33·1362	—	—	33·012	—	—	44·6527	—	—	44·967
143·5	—	—	0·1237	0·1191	—	—	—	—	0·1607	0·1665	—
144·0	—	33·2599	—	—	33·131	—	—	44·8134	—	—	45·133
144·5	—	—	0·1224	0·1178	—	—	—	—	0·1595	0·1648	—
145·0	—	33·3823	—	—	33·248	—	—	44·9729	—	—	45·298
145·5	—	—	0·1211	0·1165	—	—	—	—	0·1584	0·1631	—
146·0	—	33·5034	—	—	33·365	—	—	45·1313	—	—	45·461
146·5	—	—	0·1198	0·1152	—	—	—	—	0·1573	0·1614	—
147·0	—	33·6232	—	—	33·480	—	—	45·2886	—	—	45·622
147·5	—	—	0·1186	0·1140	—	—	—	—	0·1563	0·1598	—
148·0	—	33·7418	—	—	33·594	—	—	45·4449	—	—	45·782
148·5	—	—	0·1174	0·1128	—	—	—	—	0·1553	0·1582	—
149·0	—	33·8592	—	—	33·707	—	—	45·6002	—	—	45·940
149·5	—	—	0·1162	0·1115	—	—	—	—	0·1543	0·1565	—
150·0	33·90	33·9754	—	—	33·818	43·45	45·35	45·7545	—	—	46·097
150·5	—	—	0·1151	0·1103	—	—	—	—	0·1533	0·1549	—
151·0	—	34·0905	—	—	33·929	—	—	45·9078	—	—	46·252
151·5	—	—	0·1140	0·1091	—	—	—	—	0·1523	0·1534	—
152·0	—	34·2045	—	—	34·038	—	—	46·0601	—	—	46·405
152·5	—	—	0·1129	0·1079	—	—	—	—	0·1514	0·1518	—
153·0	—	34·3174	—	—	34·146	—	—	46·2115	—	—	46·557
153·5	—	—	0·1119	0·1068	—	—	—	—	0·1504	0·1502	—
154·0	—	34·4293	—	—	34·253	—	—	46·3620	—	—	46·707
154·5	—	—	0·1109	0·1056	—	—	—	—	0·1496	0·1487	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		H m	D cm			$d = \triangle D / \triangle t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
155·0	—	34·5402	—	—	34·358	—	—	46·5116	—	—	46·856
155·5	—	—	0·1099	0·1044	—	—	—	—	0·1488	0·1472	—
156·0	—	34·6501	—	—	34·462	—	—	46·6604	—	—	47·003
156·5	—	—	0·1089	0·1033	—	—	—	—	0·1480	0·1457	—
157·0	—	34·7590	—	—	34·566	—	—	46·8084	—	—	47·149
157·5	—	—	0·1080	0·1022	—	—	—	—	0·1472	0·1442	—
158·0	—	34·8670	—	—	34·668	—	—	46·9556	—	—	47·293
158·5	—	—	0·1071	0·1011	—	—	—	—	0·1465	0·1427	—
159·0	—	34·9741	—	—	34·769	—	—	47·1021	—	—	47·436
159·5	—	—	0·1062	0·1000	—	—	—	—	0·1458	0·1413	—
160·0	35·00	35·0803	—	—	34·869	45·10	47·00	47·2479	—	—	47·577
160·5	—	—	0·1053	0·0988	—	—	—	—	0·1451	0·1398	—
161·0	—	35·1856	—	—	34·968	—	—	47·3930	—	—	47·717
161·5	—	—	0·1044	0·0978	—	—	—	—	0·1444	0·1384	—
162·0	—	35·2900	—	—	35·066	—	—	47·5374	—	—	47·855
162·5	—	—	0·1035	0·0967	—	—	—	—	0·1438	0·1370	—
163·0	—	35·3935	—	—	35·163	—	—	47·6812	—	—	47·992
163·5	—	—	0·1026	0·0957	—	—	—	—	0·1432	0·1356	—
164·0	—	35·4961	—	—	35·258	—	—	47·8244	—	—	48·128
164·5	—	—	0·1017	0·0947	—	—	—	—	0·1426	0·1342	—
165·0	—	35·5978	—	—	35·356	—	—	47·9670	—	—	48·262
165·5	—	—	0·1008	0·0936	—	—	—	—	0·1420	0·1329	—
166·0	—	35·6986	—	—	35·447	—	—	48·1090	—	—	34·395
166·5	—	—	0·0999	0·0926	—	—	—	—	0·1414	0·1315	—
167·0	—	35·7985	—	—	35·539	—	—	48·2504	—	—	48·526
167·5	—	—	0·0991	0·0916	—	—	—	—	0·1408	0·1302	—
168·0	—	35·8976	—	—	35·631	—	—	48·3912	—	—	48·656
168·5	—	—	0·0983	0·0906	—	—	—	—	0·1402	0·1288	—
169·0	—	35·9959	—	—	35·721	—	—	48·5314	—	—	48·785
169·5	—	—	0·0975	0·0896	—	—	—	—	0·1396	0·1275	—
170·0	36·00	36·0934	—	—	35·810	46·60	48·50	48·6710	—	—	48·913
170·5	—	—	0·0967	0·0886	—	—	—	—	0·1390	0·1262	—
171·0	—	36·1901	—	—	35·899	—	—	48·8100	—	—	49·039
171·5	—	—	0·0959	0·0877	—	—	—	—	0·1384	0·1249	—
172·0	—	36·2860	—	—	35·987	—	—	48·9484	—	—	49·164
172·5	—	—	0·0951	0·0867	—	—	—	—	0·1378	0·1236	—
173·0	—	36·3811	—	—	36·074	—	—	49·0862	—	—	49·288
173·5	—	—	0·0943	0·0858	—	—	—	—	0·1372	0·1224	—
174·0	—	36·4754	—	—	36·160	—	—	49·2234	—	—	49·410
174·5	—	—	0·0935	0·0848	—	—	—	—	0·1366	0·1211	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		H m	D cm			$d = \triangle D / \triangle t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
175·0	—	36·5689	—	—	36·245	—	—	49·3600	—	—	49·531
175·5	—	—	0·0927	0·0839	—	—	—	—	0·1360	0·1199	—
176·0	—	36·6616	—	—	36·329	—	—	49·4960	—	—	49·651
176·5	—	—	0·0919	0·0830	—	—	—	—	0·1354	0·1187	—
177·0	—	36·7535	—	—	36·411	—	—	49·6314	—	—	49·770
177·5	—	—	0·0912	0·0821	—	—	—	—	0·1348	0·1175	—
178·0	—	36·8447	—	—	36·494	—	—	49·7662	—	—	49·887
178·5	—	—	0·0905	0·0812	—	—	—	—	0·1342	0·1163	—
179·0	—	36·9352	—	—	36·575	—	—	49·9004	—	—	50·003
179·5	—	—	0·0898	0·0803	—	—	—	—	0·1336	0·1151	—
180·0	37·00	37·0250	—	—	36·655	48·10	50·00	50·0340	—	—	50·118
180·5	—	—	0·0891	0·0794	—	—	—	—	0·1330	0·1139	—
181·0	—	37·1141	—	—	36·735	—	—	50·1670	—	—	50·232
181·5	—	—	0·0884	0·0786	—	—	—	—	0·1324	0·1128	—
182·0	—	37·2025	—	—	36·813	—	—	50·2994	—	—	50·345
182·5	—	—	0·0878	0·0777	—	—	—	—	0·1318	0·1116	—
183·0	—	37·2903	—	—	36·891	—	—	50·4312	—	—	50·457
183·5	—	—	0·0872	0·0769	—	—	—	—	0·1312	0·1105	—
184·0	—	37·3775	—	—	36·968	—	—	50·5624	—	—	50·567
184·5	—	—	0·0866	0·0761	—	—	—	—	0·1306	0·1093	—
185·0	—	37·4641	—	—	37·044	—	—	50·6930	—	—	50·677
185·5	—	—	0·0860	0·0752	—	—	—	—	0·1300	0·1082	—
186·0	—	37·5501	—	—	37·119	—	—	50·8230	—	—	50·785
186·5	—	—	0·0854	0·0744	—	—	—	—	0·1294	0·1071	—
187·0	—	37·6355	—	—	37·193	—	—	50·9524	—	—	50·892
187·5	—	—	0·0849	0·0736	—	—	—	—	0·1288	0·1060	—
188·0	—	37·7204	—	—	37·267	—	—	51·0812	—	—	50·998
188·5	—	—	0·0844	0·0728	—	—	—	—	0·1282	0·1049	—
189·0	—	37·8048	—	—	37·340	—	—	51·2094	—	—	51·103
189·5	—	—	0·0839	0·0720	—	—	—	—	0·1276	0·1039	—
190·0	37·90	37·8887	—	—	37·411	49·50	51·40	51·3370	—	—	51·207
190·5	—	—	0·0834	0·0712	—	—	—	—	0·1270	0·1028	—
191·0	—	37·9721	—	—	37·483	—	—	51·4640	—	—	51·309
191·5	—	—	0·0829	0·0705	—	—	—	—	0·1264	0·1018	—
192·0	—	38·0550	—	—	37·554	—	—	51·5904	—	—	51·411
192·5	—	—	0·0825	0·0697	—	—	—	—	0·1258	0·1007	—
193·0	—	38·1375	—	—	37·623	—	—	51·7162	—	—	51·512
193·5	—	—	0·0821	0·0689	—	—	—	—	0·1252	0·0997	—
194·0	—	38·2196	—	—	37·692	—	—	51·8414	—	—	51·612
194·5	—	—	0·0817	0·0682	—	—	—	—	0·1246	0·0987	—

Zahl der Jahre	Höhenwachstum					Dickenwachstum					
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		H m	D cm			$d = \triangle D / \triangle t$		D cm
	gemessen	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet	gemessen	korrigiert	interpoliert	gemessen	berechnet	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
195·0	—	38·3013	—	—	37·760	—	—	51·9660	—	—	51·710
195·5	—	—	0·0814	0·0674	—	—	—	—	0·1240	0·0977	—
196·0	—	38·3827	—	—	37·842	—	—	52·0900	—	—	51·808
196·5	—	—	0·0811	0·0677	—	—	—	—	0·1234	0·0967	—
197·0	—	38·4638	—	—	37·899	—	—	52·2134	—	—	51·905
197·5	—	—	0·0808	0·0660	—	—	—	—	0·1228	0·0957	—
198·0	—	38·5446	—	—	37·960	—	—	52·3362	—	—	52·000
198·5	—	—	0·0806	0·0653	—	—	—	—	0·1222	0·0947	—
199·0	—	38·6252	—	—	38·026	—	—	52·4584	—	—	52·095
199·5	—	—	0·0804	0·0645	—	—	—	—	0·1216	0·0937	—
200·0	38·80	38·7056	—	—	38·090	50·80	52·70	52·5800	—	—	52·189
200·5	—	—	0·0802	0·0634	—	—	—	—	0·1210	0·0927	—

Um nun weitere Untersuchungen anstellen zu können, musste ich aus der ontogenetischen Kurve die Grössen der Sachs'schen grossen Kurve des Wachstums berechnen, was ich in der vorher beschriebenen Weise so erreichte, dass ich die dem 20. 30, 40 jährigen Alter des Baumes entsprechende Höhen $H_{20}=3{\cdot}0$ m, $H_{30}=6{\cdot}3$ m, $H_{40}=10$ m... in ein rechtwinkliges Koordinatensystem auf Millimeterpapier einzeichnete (1 Jahr= 2 mm, 1 m Höhe = 1 cm). Ich verband die erhaltenen Punkte (interpolierte), las von der Kurve die jedem einzelnen Jahre entsprechende Höhe H ab, schrieb diese in die Tabelle ein und berechnete auf diese Weise die $\triangle H$ Höhendifferenzen, die sich in den einander folgenden Jahren ergaben.

Um diesen Differenzierungsvorgang besser zu illustrieren, nehmen wir ein kleines, etwa dem Alter zwischen dem 23. und 29. Jahre entsprechende Stück heraus. Die diesem Alter entsprechenden interpolierten H Grössen sind: $H_{23}=4{\cdot}2863$, $H_{24}=4{\cdot}6075$, $H_{25}=4{\cdot}9347$, $H_{26}=5{\cdot}2672$, $H_{27}=5{\cdot}6043$, $H_{28}=5{\cdot}9454$, $H_{29}=6{\cdot}2899$... Wenn wir aus jeder folgenden die dem vorigen

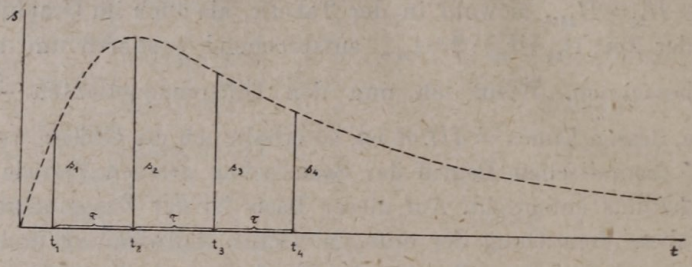
Jahre entsprechende Grösse subtrahieren, so erhalten wir die je einem Jahre entsprechende $\triangle H$ Entwicklungsdifferenz. Es wird also $\triangle H_{23\cdot5} = 0{\cdot}3212$, $\triangle H_{24\cdot5} = 0{\cdot}3272$, $\triangle H_{25\cdot5} = 0{\cdot}3325$, $\triangle H_{26\cdot5} = 0{\cdot}3371$, $\triangle H_{27\cdot5} = 0{\cdot}3411$, $\triangle H_{28\cdot5} = 0{\cdot}3445\ldots$ Da ich $\triangle t$ nicht für unendlich klein, sondern für messbar, in meinem Falle für 1 Jahr annahm, musste ich das Wachstum $H_{25} - H_{24} = H_{24\cdot5}$ (sowohl in der Tabelle, als auch im Graphikon) als der Zeit $(t_{24} + t_{25}) : 2 = t_{24\cdot5}$ entsprechend postieren und auch so berechnen. Wenn ich nun den Differenzquotienten $\frac{\triangle H}{\triangle t}$ bilde, dessen Limes $= dH/dt$ ist, so erhalte ich die Grösse, welche dem theoretischen Begriff der Sachs'schen grossen Periode des Wachstums entspricht. Auf dieser Basis ist der Zusammenhang zwischen dem Gang der ontogenetischen Entwicklung und der grossen Sachs'schen Periode des Wachstums mathematisch definiert; denn wir sehen, dass *die Sachs'sche grosse Periode nichts anders ist, als ein zeitlicher Differentialquotient der S förmigen Kurve der ontogenetischen Entwicklung.*

Die je einem Jahre entsprechenden $\triangle H / \triangle t = h$ Grössen sind in der mit «$h = \triangle H / \triangle t$ gemessen» bezeichneten 4. Rubrik der Tabelle ersichtlich. Mit deren Hilfe konstruirte ich die mit unterbrochener Linie gezeichnete Kurve der Fig. 3. Aus den hier folgenden Grössen $h_{10\cdot5} = 0{\cdot}1834$, $h_{35\cdot5} = 0{\cdot}3540$, $h_{60\cdot5} = 0{\cdot}2944$, $h_{85\cdot5} = 0{\cdot}2269$ berechnete ich r und w, während ich aus $h_{6\cdot5} = 0{\cdot}1227$, $H_{35\cdot5} = 0{\cdot}3540$ die Koeffizienten a und b erhielt.

Die Berechnung der Koeffizienten r, w, a, b gestaltet sich ziemlich einfach, wenn wir in den zu lösenden Gleichungen — wie mir mein Kollege Dr. Karl Walek, Professor der Mathematik an unserer Hochschule, empfahl — die Zeiten t_1, t_2, t_3,... so wählen, dass sie eine *arithmetische* Progression, die entsprechenden Werte von $e^{-(r-m)t}$ und $e^{-(r+m)t}$ also je eine *geometrische* Progression bilden.

Wenn wir die Koeffizienten r, w, a, b mit Hilfe der Gleichung (1) ausrechnen wollen, so müssen wir den Lauf der Kurve wenigsten in vier Punkten kennen; also wir benötigen wenigstens vier entsprechende Versuchsangaben. Wählen wir die Versuchspunkte derart, wie dies die Fig. 3 zeigt.

Bei der Berechnung der in Rede stehenden Kurven erwies es sich als zweckmässig t_2 dort anzunehmen, wo der Wert der Sachs'schen grossen Periode am grössten ist. Die anderen Werte sind so zu wählen, dass t_1 vor t_2, hingegen t_3 und t_4 hinter t_2 in gleichen τ Intervallen angenommen sind. Wenn möglich, ordnen wir die Versuche so an, dass die Messungen in diese vorteilhaften Zei-



Figur 3. Elklärung im Text.

ten fallen; lässt sich dies nicht erreichen, so werden wir die nötigen Grössen im Besitz von genügenden und verlässlichen Angaben durch graphische Interpolation erhalten.

Zur Abkürzung bezeichnen wir $r-m$ durch x und $r+m$ durch y.

Dann ist

$$\begin{aligned} 2s_1 &= ae^{-xt_1} + be^{-yt_1}, & 2s_2 &= ae^{-x(t_1+\tau)} + be^{-y(t_1+\tau)}, \\ 2s_3 &= ae^{-x(t_1+2\tau)} + be^{-y(t_1+2\tau)}, & 2s_4 &= ae^{-x(t_1+3\tau)} + be^{-y(t_1+3\tau)}, \end{aligned} \tag{1a}$$

oder kürzer:

$$\begin{aligned} 2s_1 &= X + Y, & 2s_2 &= Xz + Y.\zeta, \\ 2s_3 &= Xz^2 + Y.\zeta^2, & 2s_4 &= Xz^3 + Y.\zeta^3, \end{aligned} \tag{1b}$$

wo

$$X = ae^{-xt_1}, \quad Y = be^{-yt_1}, \quad z = e^{-x\tau}, \quad \zeta = e^{-y\tau}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wie leicht ersichtlich:

$$s_1 z\zeta - s_2(z+\zeta) + s_3 = 0$$

und

$$s_2 z\zeta - s_3(z+\zeta) + s_4 = 0.$$

Wenn wir $(z+\zeta)$ mit B, $z\zeta$ mit C bezeichnen, so ist aus den letzten beiden Gleichungen:

$$B = z + \mathfrak{z} = \frac{s_1 s_4 - s_2 s_3}{s_1 s_3 - s_2 s_2},$$

$$C = z \cdot \mathfrak{z} = \frac{s_2 s_4 - s_3 s_3}{s_1 s_3 - s_2 s_2}.$$

Nun sind z und $\mathfrak{z}$ die Wurzeln der Gleichung zweiten Grades

$$t^2 - Bt + C = 0,$$

somit gleich

$$\frac{B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}, \text{ respektive } \frac{B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}.$$

Aus den so gewonnenen z und $\mathfrak{z}$ können wir x und y, resp. r und m auf folgende Weise erhalten.

Aus $$z = s^{-x\tau} \quad \text{folgt} \quad x = -\frac{\log z}{\tau \log e},$$

aus $$\mathfrak{z} = e^{-y\tau} \quad \text{folgt} \quad y = -\frac{\log \mathfrak{z}}{\tau \log e}.$$

Da aber

$$x = r - m, \quad y = r + m,$$

so ist

$$m = \frac{y - x}{2} \quad \text{und} \quad r = \frac{y + x}{2}$$

und schliesslich, da nach Gleichung (2) $m = \sqrt{r^2 - w^2}$, wird $w^2 = r^2 - m^2$ sein.

Haben wir so r und w berechnet, so folgt die Berechnung der Koeffizienten a und b. Zur Berechnung genügen die in zwei beliebigen Zeitpunkten t_1, t_2 im Versuche erhaltenen $s_1 = h_1$, $s_2 = h_2$ Grössen. Wir können von den im Vorherigen gegebenen Versuchsgrössen h_1, h_2, h_3, h_4 beliebige zwei wählen. Ist dann

$$e^{-(r-m)t_1} = D_1, \quad e^{-(r+m)t_1} = E_1,$$
$$e^{-(r-m)t_2} = D_2, \quad e^{-(r+m)t_2} = E_2,$$

so bekommen die Gleichungen (1a) die Form:

$$\begin{aligned} 2s_1 &= aD_1 + bE_1, \\ 2s_2 &= aD_2 + bE_2, \end{aligned} \tag{1d}$$

woraus

$$a = \frac{2s_1 E_2 - 2s_2 E_1}{D_1 E_2 - D_2 E_1}, \quad b = \frac{2s_2 D_1 - 2s_1 D_2}{D_1 E_2 - D_2 E_1}.$$

II. Tabelle.

$t_1 = t = h_{10\cdot5} = 0\cdot1834$; $h_2 = h_{t_2} = h_{35\cdot5} = 0\cdot3540$; $h_3 = h_{t_3} = h_{60\cdot5} = 0\cdot2944$; $h_4 = h_{t_4} = h_{85\cdot5} = 0\cdot2269$; $\tau = 25$

$$z + \vartheta = \frac{h_1h_4 - h_2h_3}{h_1h_3 - h_2h_2} = \frac{0\cdot1834.0\cdot2269 - 0\cdot3540.0\cdot2944}{0\cdot1834.0\cdot2944 - (0\cdot3540)^2} = \frac{-0\cdot062604}{-0\cdot071323} = 0\cdot87775 = B$$

$$z \cdot \vartheta = \frac{h_2h_4 - h_3h_3}{h_1h_3 - h_2h_2} = \frac{0\cdot3540.0\cdot2269 - (0\cdot2944)^2}{0\cdot1834.0\cdot2944 - (0\cdot3540)^2} = \frac{-0\cdot006349}{-0\cdot071323} = 0\cdot08901 = C$$

$B^2 = 0\cdot77045$
$-4C = -0\cdot35604$
$0\cdot41441 = F$

$\log F = 0\cdot61741 - 1$
$= 1\cdot61741 - 2$: 2
$N \log 0\cdot80870 - 1 = 0\cdot64373 = R$

$$z = \frac{+B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2} = \frac{+B + R}{2} = \frac{0\cdot87775 + 0\cdot64373}{2} = \text{---------} \quad 0\cdot76074 = z$$

$$\vartheta = \frac{+B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2} = \frac{+B - R}{2} = \frac{0\cdot87775 - 0\cdot64373}{2} = \text{---------} \quad 0\cdot11701 = \vartheta$$

$$x = \frac{-\log z}{\tau \log e} = \frac{-\log 0\cdot76074}{25.0\cdot434294} = \frac{+1 \quad -1}{-0\cdot88124 - 1} = \frac{0\cdot11876}{10\cdot85735} = x = \text{----} \quad 0\cdot010938 = r - m$$

$$y = \frac{-\log \vartheta}{\tau \log e} = \frac{-\log 0\cdot11701}{25.0\cdot434294} = \frac{+1 \quad -1}{-0\cdot06822 - 1} = \frac{0\cdot93178}{10\cdot85735} = y = \text{----} \quad 0\cdot085820 = r + m$$

$$r = \frac{y + x}{2} = \frac{0\cdot096758}{2} = \text{---------} \quad 0\cdot048379 = r$$

$$m = \frac{y - x}{2} = \frac{0\cdot074882}{2} = \text{---------} \quad 0\cdot037441 = m$$

$\omega^2 = r^2 - m^2 = (r + m)(r - m)$
$\log (r + m) = 0\cdot93359 - 2$
$\log (r - m) = 0\cdot03894 - 2$
$\omega^2 = N \log 0\cdot97253 - 4$ ---------- : 2 $\quad 0\cdot000938 = \omega^2$
$r^2 > \omega^2$; $\omega = N \log 0\cdot48626 - 2 =$ ---------- $0\cdot030638 = \omega$

$h_1 = h_{t_1} = h_{6\cdot5} = 0\cdot1227$; $h_2 = h_{t_2} = h_{35\cdot5} = 0\cdot3540$
$e^{-(r-m)t} = D$, $e^{-(r+m)t} = E$

$$b = \frac{2h_2D_1 - 2h_1D_2}{D_1E_2 - D_2E_1} = \frac{0\cdot7080 \cdot 0\cdot93138 - 0\cdot2454 \cdot 0\cdot67823}{0\cdot93138.0\cdot04752 - 0\cdot67823.0\cdot57245} = \frac{+0\cdot49298}{-0\cdot34399} = \text{----------} \quad -1\cdot4331 = b$$

$$a = \frac{2h_1E_2 - 2h_2E_1}{D_1E_2 - D_2E_1} = \frac{0\cdot2454 \cdot 0\cdot04752 - 0\cdot7080 \cdot 0\cdot57245}{0\cdot93138.0\cdot04752 - 0\cdot67823.0\cdot57245} = \frac{-0\cdot39363}{-0\cdot34399} = \text{----------} \quad +1\cdot1443 = a$$

Anhang zur II. Tabelle.

a D		$= 1{\cdot}1443 . 0{\cdot}93138$	$= 1{\cdot}0658$		
+ b E	t = 6·5	$= + (- 1{\cdot}4331 . 0{\cdot}57245)$	$= - 0{\cdot}8204$		
= 2 s		=	$0{\cdot}2454 : 2 = 0{\cdot}1227$	0·1227	= s

$\alpha = \frac{a}{r-m} = \frac{1{\cdot}1443}{0{\cdot}010938} =$	$104{\cdot}62$		104·62	$= \alpha$
$\beta = \frac{b}{r+m} = \frac{-1{\cdot}4331}{0{\cdot}085820} =$	$-16{\cdot}70$		− 16·70	$= \beta$
	$87{\cdot}92 = \alpha + \beta = C_0$		87·92	$= C_0$

C_0		=	87·92		
$- \beta E$		$= - (- 16{\cdot}70 . 0{\cdot}005804) =$	0·10		
	t = 60		88·02		
$- \alpha D$		$= - (104{\cdot}62 . 0{\cdot}518800) =$	− 54·28		
2 S =		=	33·74 : 2 =	16·87	= S

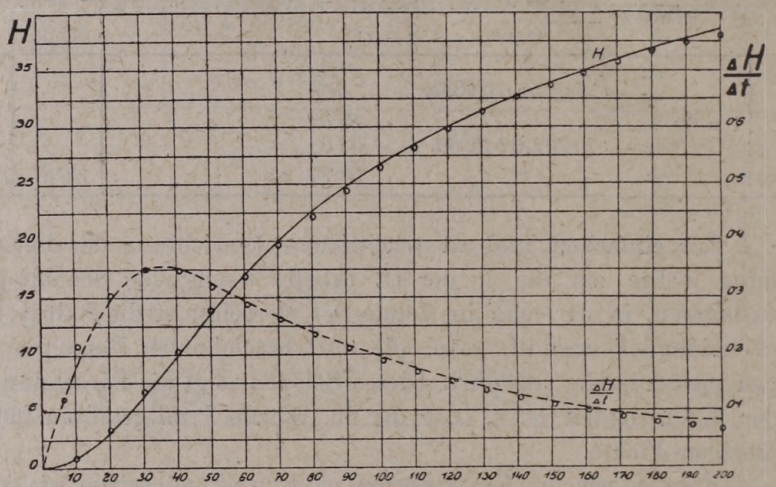
Zur einfachen und übersichtlichen Einrichtung der Rechnung stellte ich die in der II. Tabelle ersichtliche Schablone zusammen, in der man im Laufe der Berechnung die Rubriken nacheinander ausfüllt, resp. die dort bezeichneten Berechnungen nacheinander ausführt. Dieses Beispiel zeigt die Berechnung der Koeffizienten w, r, a, b der in Tabelle I mitgeteilten 200 jährigen Fichte.

Kennen wir die Koeffizienten w, r, a, b, so setzen wir sie in die Gleichungen (1) oder (3) und können zu jedem Zeitpunkt t den entsprechenden Werte von $s=h$ oder $S=H$ ausrechnen, wie wir dies aus der Tabelle I in ihren 5. und 6. Rubriken sehen können. Wollen wir sehr viele Versuchsangaben aufarbeiten, wie das bei mir der Fall war, als ich diese Gesetzmässigkeit suchte, so ist es angezeigt auch zur Berechnung von s und S eine Tabelle zu verfertigen und auf ihr ordnungsgemäss zu schreiten, weil auf diese Weise Irrtümer leichter zu vermeiden sind. (Anhang zur II. Tabelle.)

Ich möchte bemerken, dass wir dieselben Berechnungen nicht nur aus der Kurve der Sachs'schen grossen Periode, also aus den Angaben der 4. Rubrik $s=h$, sondern auch unmittelbar aus den Grössen der S Kurve, also aus den Angaben der 3. Rubrik $S=H$ erhalten. Die Gleichungen kann man sich aus der Formel (3) ausgehend nach dem obengegebenen Prinzipe

leicht ableiten. Die hier geschilderte Methode ist darum empfehlenswerter, weil wir den Maximumpunkt von s sehen und es zweckmässig ist den Wert dieses Punktes bei der Berechnung als zweite Angabe (t_2) zu wählen.

Bei dem hier angeführten Beispiele des Baumwachstums decken sich die gemessenen und berechneten Kurven hinreichend gut. Aber bei auf einzelne Individuen sich beziehenden Messun-



Figur 4. Die Höhenwachstumsangaben einer 200 jährigen Fichte. Die voll ausgezogene Linie zeigt das Höhenwachstum des Baumes auf Grund von v. GUTTENBERG's Messungen. Die mit unterbrochener Linie gezeichnete Kurve gibt die SACHS'sche grosse Periode des Höhenwachstums. Daneben ist eine durch eingekreiste Punkte angedeutete Kurve zu sehen, welche die mit Hilfe von Gleichung (1), resp. (3) berechnete Grössen anzeigt. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist zufriedenstellend.

gen können diese, bei den in weiten Grenzen sich verändernden biologischen Faktoren dermassen von den konstanten äusseren biologischen Verhältnissen und den regelmässig ablaufenden inneren biologischen Verhältnissen abweichen, dass die theoretische Kurve nur dann mit der Versuchskurve übereinstimmt, wenn wir die modifizierende Wirkung der biologischen Verhältnisse mit in Betracht ziehen. Hierauf will ich in meinen Erörterungen später noch zurückkommen.

Bei der Berechnung der Koeffizienten bestimmte ich vorerst die Grösse von r und m, sodann mit neuer Rechnung die von a und b. Als ich dann die Koeffizienten $r=0{\cdot}048379$, $w=0{\cdot}030643$, $m=0{\cdot}037441$, $a=1{\cdot}144308$, $b=-1{\cdot}433101$ beisammen hatte, konnte ich durch Einsetzen derselben in die Gleichung (1), resp. (3) die in der 5. Rubrik gegebenen Daten berechnen. Diese Daten habe ich in Fig. 4 neben die mit unterbrochener Linie gezeichnete SACHS'sche Kurve mit eingekreisten Punkten eingetragen, entsprechend je 10 Jahren. Man sieht, dass diese beiden Linien nicht nur gleichsinnig sind, sondern auch befriedigend übereinstimmen.

Nach Einsetzen der gefundenen Koeffizienten r, w, a, b in die Integralformel (3) berechnete ich die Original-Messangeben GUTTENBERGS's, d. h. die Angaben des ontogenetischen Entwicklungsganges. Diese Massangaben sind in der 6. Rubrik der I. Tabelle zu finden. In der Fig. 4. sind sie mit der umkreist punktierten Linie angedeutet. Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Grössen ist auch hier ganz zufriedenstellend. Die Abweichungen erkläre ich mit Veränderungen der biologischen Verhältnisse. Wären die äusseren biologischen Verhältnisse der Pflanzen konstant und würden die Pflanzen die Änderung ihrer inneren biologischen Verhältnisse regelmässig einhalten, so würden die berechneten und gemessenen Resultate genau übereinstimmen.

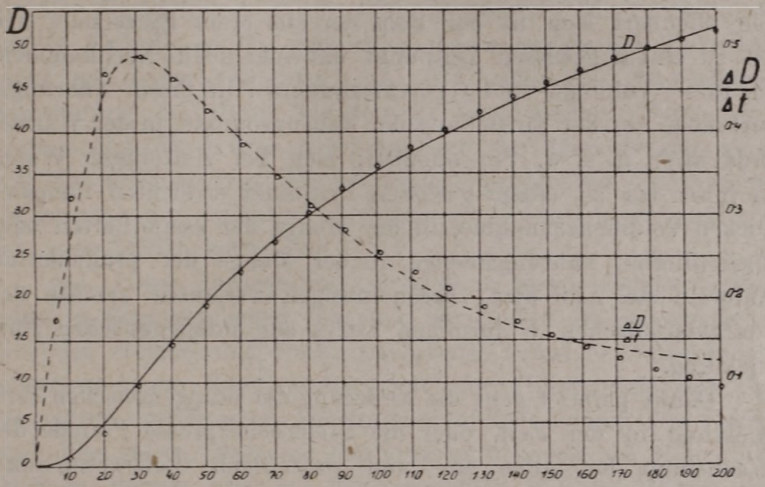
*

Untersuchen wir nunmehr das Dickenwachstum der Fichte. GUTTENBERG's Originalmasse sehen wir in der 7. Rubrik der I. Tabelle. Die Dickenmessungen der Jahresringe nahm GUTTENBERG in Querschnitten vor, die in Brusthöhe (130 cm) angelegt waren. Bis die Bäume diese Höhe erreicht hatten, dauerte cca 11 Jahre. Die Dicken der bis dahin entstandenen Jahresringe fehlen (wie dies auch Tafel XX zeigt) aus denn GUTTENBERG'schen Angaben. Wir müssen bei unserer Untersuchung diesen Mangel ersetzen. Dies können wir durch Extrapolierung erreichen, indem wir die Originalmassangaben auf Millimeterpapier auftragen und dadurch eine Kurve erhalten, deren Fortsetzung wir

dann dem natürlichen Gang der Kurve entsprechend einzeichnen. Wäre der Durchmesser der Fichte in diesen 11 Jahren mit derselben Intensität gewachsen, wie dies die Jahresringe der 20 jährigen Fichte in Brusthöhe zeigt, so würde die Extrapolierung eine um 1·9 mm grössere Dicke ergeben. Diese 1·9 mm Dicke müssen wir zu allen Massangaben GUTTENBERG's, die nach dem 11. Jahre erfolgen, addieren, denn nur so zeigen die Dickenangaben die zu jeder Zeit erreichte wirkliche Dicke des Baumes. Die Rubrik 7 der I. Tabelle zeigt die Originaldaten und die Rubrik 8, die mit 1·9 mm korrigierten Dickendurchmesser an. Diese korrigierten Daten der Rubrik 8 zeichnete ich auf Millimeterpapier und differenzierte sie in der bei Besprechung der Höhe beschriebenen Weise. So erhielt ich die in der 10. Rubrik gezeigten $d = \triangle D / \triangle t$ Grössen, welche der SACHS'schen grossen Periode des Fichten-Dickenwachstums entsprechen. Gelegentlich der Differenzierung verschwindet diese hinzuaddierte Konstante 1·9, wodurch sie den Wert des Differenzquotienten nicht beeinflusst, während es hingegen gelingt, den Differenzquotienten der ersten Jahre durch Extrapolierung der so verbesserten Originalkurve und ihrer Differenzierung mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. Aus diesen 10·5, 30·5, 50·5, 70·5 Zeiten entsprechenden $d_{10{\cdot}5} = 0{\cdot}2623$, $d_{30{\cdot}5} = 0{\cdot}4924$, $d_{50{\cdot}5} = 0{\cdot}4341$, $d_{70{\cdot}5} = 0{\cdot}3573$ Grössen, die in der 10. Rubrik der I. Tabelle zu ersehen sind, berechnete ich die Koeffizienten r, m, resp. w der aperiodisch gedämpften Schwingung, sodann $d_{6{\cdot}5} = 0{\cdot}1739$, $d_{30{\cdot}5} = 0{\cdot}4924$ und aus diesen die Grösse von a und b. Die Rechnungsergebnisse sind: $r = 0{\cdot}059028$, $m = 0{\cdot}048773$, $w = 0{\cdot}033249$, $a = 1{\cdot}45032$, $b = -2{\cdot}03307$. Nachdem ich diese Koeffizienten in die Gleichung (1) und (3) einsetze, berechnete ich theoretisch die Grössen des Wachstums, die in der 11. Rubrik der Tabelle I ersichtlich sind, desgleichen auch jene theoretischen Angaben des ontogenetischen Entwicklungsganges, die in der 12. Rubrik angeführt sind.

Wenn wir nun die gemessenen und berechneten Grössen graphisch darstellen, so erhalten wir die Kurven der Fig. 5. Die S förmig vollausgezogene Kurve dieser Figur zeigt uns die in der 7. 8. und 9. Rubrik ersichtliche ontogenetische Entwick-

lung der Fichte. Diese Kurve ist auf Grund von das ganze Leben des Baumes berücksichtigenden *Messangaben* gezeichnet. Die neben ihr gezeichneten eingekreisten Punkte sind mit Gleichung (3) *berechnet* auf Grund der in der 12. Rubrik der Tabelle I angeführten theoretisch ermittelten Grössen.



Figur 5. Die Dickenwachstumsangaben derselben Fichte. Die vollausgezogene Linie zeigt die Dicke des Baumes, die unterbrochene Linie hingegen die Sachs'sche grosse Periode des Dickenwachstums bei verschiedenen Alter des Baumes. Daneben ist eine durch eingekreiste Punkte angedeutete Kurve zu sehen, welche die mit Hilfe von Gleichung (1), resp. (3) berechnete Grössen anzeigt. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist zufriedenstellend.

In derselben Figur zeigt die gestrichelte Kurve die in der 10. Rubrik mit «$\triangle D/\triangle t$ gemessen» bezeichnete Angaben, welche dem jährlichen Dickenwachstum der Pflanze entspricht. Die in der Nähe dieser Kurve sich befindenden aus eingekreisten Punkten gebildete Kurve entspricht den mit Gleichung (1) berechneten Grössen. Wie ersichtlich, stimmen die Versuchsergebnisse mit den berechneten Ergebnissen in zufriedenstellender Weise überein. Die Abweichungen erkläre ich auch hier mit den Änderungen der biologischen Verhältnisse.

*

Die Erfahrungen, welche die Forscher auf Grund von Messungen der Lebenserscheinungen seit HARTING (1845) bis zum heutigen Tage machten, und wie ich auch in meinem kurzen geschichtlichen Überblick darauf hinwies, bestätigen einstimmig, dass die *S* förmige Kurve des ontogenetischen Entwicklungsganges eine bei Lebewesen ganz allgemeine Erscheinung ist. Sie offenbart sich in der Zahl der aus einer Einzelzelle sich bis zu einem gewissen Zeitpunkt entwickelnden Nachkommen, in ihrer Volumen- und Gewichtszunahme, in ihrem Nahrungsverbrauch, in der Entstehung der Nebenprodukte, in der Wärmeproduktion u. s. w. Sie offenbart sich bei vielzelligen Wesen in ihrer bis zu einem gewissen Zeitpunkt erreichten Längen-, Dicken-Volumenszunahme, in der Menge der assimilierten oder dissimilierten Nahrungsmenge, in der Menge der produzierten Kalorien etc. Alle diese Erscheinungen verlaufen gemäss der charakteristischen *S* förmigen Kurve der ontogenetischen Entwicklung.

Damit parallel geht die Änderung der ontogenetischen Entwicklung in der Zeit, oder die SACHS'sche grosse Periode des Wachstums bei allen ein- und vielzelligen Lebewesen und ihren Lebenserscheinungen, als ein charakteristischer Verlauf, was ja ganz selbstverständlich ist, da die grosse Periode des Wachstums den zeitlichen Differenzquotienten des ontogenetischen Entwicklungsganges derstellt.

Nachdem ich mich auf diese Zusammenhänge berufen habe, muss ich nun noch eingehend beweisen, dass die grosse Periode der Entwicklung prinzipiell identisch resp. unter gewissen Bedingungen identisch ist mit der Kurve des Verlaufs der harmonisch gedämpften Schwingung. Die theoretischen Ableitungen lasse ich vorläufig bei Seite; statt ihrer will ich auf die im Vorherigen angeführten Tatsachen hinweisen, laut welchen die gemessenen und berechneten Grössen sich in befriedigender Weise decken. Zahlreiche ähnliche Erfahrungen will ich später noch veröffentlichen. Mein weiterer Beweis liegt darin, dass die Kurve der grossen Periode des Wachstums und die Kurve der aperiodisch gedämpften Schwingung einander immer ähnlich sind; und wenn ihre Übereinstimmung nicht so vollkommen

ist, dass man die Versuchsangaben mit den gegebenen Gleichungen (1) oder (3) bei konstanten r, w, a, b Koeffizienten genau verfolgen kann, so liegt hier für der Grund darin, dass die äusseren biologischen Verhältnisse in der Entwicklung der Lebewesen nicht konstant sind, oder dass sich auch die inneren biologischen Verhältnisse durch störende äussere, oder unbekannte innere Gründe (z. B. Änderung der energetischen Faktoren) nicht so normal ablaufen, wie die gedämpfte harmonische Schwingung bei ihren konstanten Koeffizienten. Demzufolge können sich die beiden Erscheinungen nur dann decken, wenn wir die Koeffizienten der aperiodisch gedämpften Schwingung für je nach den äusseren oder inneren biologischen Verhältnissen veränderlich betrachten.

Bei dieser Betrachtung ist es dann umso überraschender, wenn in dem gegebenen Beispiele der Fichte die Gesetzmässigkeit des Höhen- und Dickenwachstums, selbst bei unverändert angenommenen Koeffizienten, mit der Gesetzmässigkeit der aperiodisch gedämpften Schwingung übereinstimmt. Die Erklärung liegt darin, dass bei der grossen Lebensdauer dieser 200 jährigen Bäume und bei den erreichten grossen Massen, die in je einem Jahre erreichte Zunahme verhältnismässig gering ist, so dass die durch Witterungsverhältnisse auftretende Wachstumsänderungen im Verhältnis zu den grossen Massen doch nur geringe sind. Ausserdem beziehen sich die Versuchsangaben auf Durchschnittswerte, die aus Messungen vieler Individuen erhalten wurden, wodurch sich die individuellen Schwankungen verwischen. Bei den Wachstumsangaben dieser Bäume dominieren daher jene Faktoren, welche charakteristisch sind für die konstanten äusseren und regelmässig ablaufenden inneren biologischen Verhältnisse. Unter solchen Umständen kommen jene *inneren Gründe*, oder jene *Grundfaktoren des Lebens* zur Geltung, die beim Ablauf der Lebenserscheinungen von grösster Wichtigkeit sind. Im lebenden Organismus stehen diese Lebensfaktoren im ständigen Kampf miteinander, ihre absolute und relative Grösse hängt von ererbten Eigenschaften, vom Alter der Lebewesen und von äusseren biologischen Verhältnissen ab. Die grosse Periode des Wachstums, die Kurve der ontogeneti-

schen Entwicklung beschreibt diesen Kampf, resp. die sich dabei einstellende Gleichgewichtslage. Da sich bei den Bäumen die Einwirkung der äusseren biologischen Verhältnisse verwischt, tritt der regelmässige Ablauf der inneren Lebensfaktoren klar zu Tage.

Das Bild der grossen Periode der Entwicklung wird durch die äusseren biologischen Verhältnisse beträchtlicher gestört bei den schneller sich entwickelnden ein- und mehrzelligen Wesen, bei denen die äusseren biologischen Verhältnisse durch die in der Zeit sich abspielenden Änderungen der Temperatur, der Belichtung, der Qualität und relativen Quantität und Konzentrationen der Nahrung etc. den Ablauf des Wachstums stark beeinflussen und somit in der Kurve der grossen Periode und damit auch in jener der ontogenetischen Entwicklung, kleinere-grössere Einsenkungen oder Vorbauchungen, oder gar wellige Formationen hervorrufen. Diese von den Physiologen schon lange gekannte Erscheinung benannten sie die kleine Periode des Wachstums.[1] Sie ist auch an Bäumen zu erkennen, da das jährliche Längenwachstum und die Dicke der Jahresringe sich in der Wirklichkeit doch nicht gleich bleibt, sondern von den Witterungsverhältnissen abhängig ist. Nur, wie ich oben bereits bemerkte, sind diese Schwankungen bei den grossen Dimensionen des Baumes verhältnismässig klein und somit im Verhältnis zu den grossen Massen der grossen Periode verschwindend geringe.

Die neben der grossen Periode der Lebewesen sich zeigenden kleinen Perioden beweisen in einer jeden Zweifel ausschliessenden Weise, dass das Bild des Lebensablaufes sich je nach den biologischen Verhältnissen ändert. Ferner ist voraus zu sehen, dass im Verlaufe einer Funktion Schwankungen erfolgen müssen, sobald die Werte ihrer Koeffizienten nicht konstant sind; und so wird sich auch die Kurve der aperiodisch gedämpften Schwingung ändern, wenn ihre Koeffizienten von einwirkenden Ursachen abhängig sind. Die biolo-

[1] I. Sachs: Lehrbuch der Botanik. III. Aufl. Leipzig 1873 S. 726.

gischen Verhältnisse beeinflussen das Wachstum und die Schwankungen der Wachstumserscheinungen ändern die Koeffizienten der aperiodischen Schwingung. Die Funktionen der Wachstums-Erscheinung und der gedämpften Schwingung decken sich daher, wenn wir die Koeffizienten der letzteren je nach den äusseren und inneren biologischen Verhältnissen der Lebewesen für veränderlich betrachten.

Auf Grund von Erfahrungen der Forscher, wie auch auf Grund meiner eigenen Experimente und Erwägungen kann ich behaupten, dass

die Gesetzmässigkeit im Wachstum und verschiedener mit dem Wachstum zusammenhängender Lebenserscheinungen mit der Gesetzmässigkeit der aperiodisch gedämpften Schwingung übereinstimmt, wenn wir die Koeffizienten derselben je nach den biologischen Verhältnissen als variabel betrachten.

Zur besseren Verständlichkeit muss ich nochmals bemerken, dass wir unter $s =$ Wachstum etc. einen Grenzwert, $s = \lim \Delta S/\Delta t = ds/dt$ verstehen; S kann bedeuten Gewicht, Länge, Breite, Volumen, Zahl, Menge der assimilierten oder dissimilierten Nahrung, oder produzierte Wärme etc. eines ein- oder mehrzelligen Wesens; t ist die zum Ablauf einer hiergenannten Lebenserscheinung benötigte Zeit.

Wenn wir die Koeffizienten r, w, a, b, entsprechend den biologischen Verhältnissen für variabel betrachten, so sind wir imstande mit Hilfe der Gleichungen (3) und (1) die im Laufe der ontogenetischen Entwicklung der Lebewesen auftretenden Abweichungen, kleineren-grösseren Schwankungen, event. Periodizitäten, oder die in der Sachs'schen grossen Kurve auftretenden kompliziert aussehenden Modifikationen auszudrücken, so dass die theoretischen Berechnungen sich mit den Versuchsergebnissen vollkommen decken können.

Nach dem hier gesagten ist es klar, dass die Entwicklungskurve des als Beispiel angeführten Baumes, oder eines beliebigen ein- oder mehrzelligen Wesens auch aufzufassen ist als eine Resultierende, welche sich aus den grossen und kleinen Perioden der das Lebewesen bildenden Zellen ergibt. Jede Zelle hat ihre grosse und auch ihre kleinen Perioden. Und

weil die Perioden der das Lebewesen bildenden Zellen in Raum und Zeit zu einander verschoben und übereinander gehäuft sind, ist die grosse Kompliziertheit verständlich, die das Bild des Lebensablaufes so verwirrt erscheinen lässt. Jedoch lässt uns die Gesetzmässigkeit, welche wir bei der Entwicklung der Lebewesen und bei der Funktion ihrer Organe trotzdem beobachten können, hoffen, dass die ausdauernde Forschung zu Erkenntnissen führen wird, welche schliesslich die den Lebensablauf regulierenden Kräfte und die Gesetze ihrer Wirkung erschauen lassen. Natürlich müssen Richtung, Reihenfolge und Methode, die zu diesem Ziele führen, auch richtig gefunden werden. Unser erster Schritt in dieser Richtung muss sein, den Sinn der in den Gleichungen (1) und (3) vorkommenden Koeffizienten zu verstehen.

Dass die Grössen der Koeffizienten r, w, a, b, sich tatsächlich mit den biologischen Verhältnissen ändern, werde ich in der nächsten Mitteilung noch genauer zeigen, in einer dritten Mitteilung beleuchte ich den Sinn der in Frage stehenden Koeffizienten.

ERLÄUTERUNGEN DER GESETZMÄSSIGKEITEN IM ABLAUFE DER LEBENSERSCHEINUNGEN LEBENDER WESEN.

(II. Mitteilung.)

Von FRANZ KÖVESSI (Sopron).

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung vom 4. Juni 1928 durch A. MÁGOCSY-DIETZ, ord. Mitglied der Akademie.[1]

Beweis, dass die Koeffizienten der gedämpften Schwingung, die sich bei der Entwicklung der Lebewesen zeigen, je nach den biologischen Verhältnissen veränderlich sind.

In der vorangehenden I. Mitteilung kam ich zu der Erkenntnis, dass «die Gesetzmässigkeit im Wachstum und verschiedener mit dem Wachstum zusammenhängenden Lebenserscheinungen übereinstimmt mit der Gesetzmässigkeit der aperiodisch gedämpften Schwingung unter der Bedingung, dass wir die Koeffizienten r, w, a, b derselben je nach den biologischen Verhältnissen als variabel betrachten». Diesmal erbringe ich den Beweis dafür, dass sich r, w, a, b tatsächlich je nach den biologischen Verhältnissen ändern.

In meiner I. Mitteilung habe ich auch auf die längst bekannte Erscheinung hingewiesen, dass sich neben der SACHS'schen grossen Periode des Wachstums eine sekundäre, manchmal regelmässig aussehende, periodisch ablaufende Schwankung zeigt, die sich zur Grösse der grossen Periode addiert. Sie heisst die kleine Periode der Entwicklung und sämtliche Forscher sind darin

[1] Ungarisch auszüglich erschienen unter dem Titel: *Az élőlények fejlődése szabályosságának a magyarázata. II. közlemény.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő XLV. (1928), S. 665—675). Daselbst auch die kurze Zusammenfassung in deutscher Sprache unter dem Titel: *Erläuterungen der Gesetzmässigkeiten im Verlaufe der Lebenserscheinungen lebender Wesen.* II. Mitteilung. S. 666—667.

einig, dass sie von der Veränderung der biologischen Verhältnisse verursacht wird. Mit dieser qualitativ wichtigen Schwankung kann man aber keine Berechnungen anstellen, trotzdem sie zweifellos besteht. Wenn wir im Folgenden beweisen wollen, dass sich *w*, *r*, *a*, *b* je nach den biologischen Verhältnissen ändern, *so brauchen wir Messangaben* in Bezug auf das Wachstum von in verschiedenen biologischen Verhältnissen sich entwickelnden Lebewesen. Diese können wir nur durch entsprechende Versuche erhalten. Damit ich im Rahmen meiner I. Mitteilung bleibe, benütze ich als Basis meiner Berechnungen R. v. GUTTENBERG's[1] die das Wachstum der Fichte (Picea excelsa L. k.) betreffenden Messungen, die er in den Fichtenwäldern von Panaveggio (Südtirol) anstellte.

R. v. GUTTENBERG unterscheidet in dieser Arbeit bezüglich der genannten Fichten fünf Standortklassen. Er bezeichnet die beste Klasse mit I, die schlechteste mit V und unterscheidet die Klassen als «*ausgezeichnet*», «*sehr gut*», «*gut*», «*gering*», «*sehr gering*». Die Beschreibung der einzelnen Standortklassen ist nach v. GUTTENBERG die folgende:

‚1. Standort «ausgezeichnet» (I. St.-Kl.): meist tiefgründiger, humoser Lehmboden auf Mergelschiefer oder tonigem Kalk in geschützter Lage bei 800 bis 1000 m Meereshöhe.

2. Standort «sehr gut» (II. St.-Kl.): meist frischer, sandiger Lehmboden auf Kalk, Buntsandstein, Grauwacken- oder Urgebirgsschiefer, in der Meereshöhe von 1000 bis 1300 m.

3. Standort «gut» (III. St.-Kl.), vielleicht gegenüber dem, was meist unter einem «guten» Standort verstanden wird, besser als «mittelgut» zu bezeichnen: seichterer sandiger Lehmboden auf Schiefer etc. oder Humusboden auf Kalk bei 1200 bis 1400 m Höhe oder tiefgründiger, frischer Boden in höherer Lage (1400 bis 1500 m).

4. Standort «gering» (IV. St.-Kl.): meist seichter, steiniger oder felsiger, oder zu nasser Boden auf Schiefer etc., oder seichter, trockener Lehm- und Humusboden auf Kalk (Dolomit)

---

[1] R. v. GUTTENBERG: Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge. Deuticke, Wien und Leipzig. 1915.

in der Sonnseite, oder auch besserer Boden bei hoher und exponierter Lage, vorwiegend bei 1400 bis 1600 m Meereshöhe.

5. Standort «sehr gering» (V. St.-Kl.): sehr hohe und rauhe oder stark exponierte Lage, meist 1600 bis 1800 m über dem Meeresspiegel.'

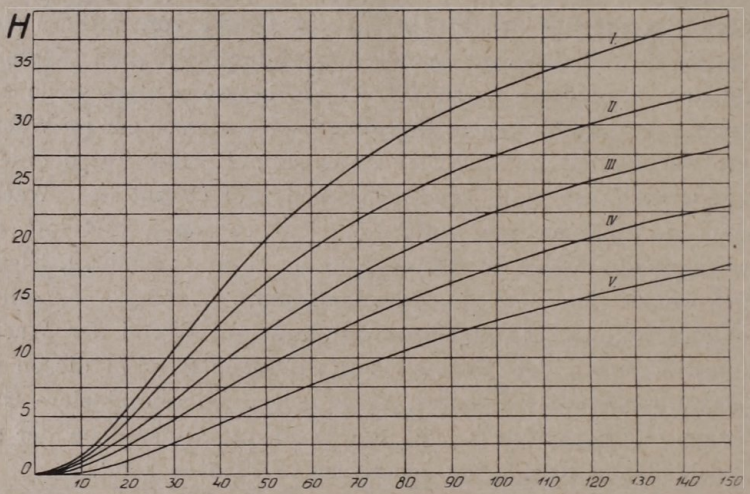
Wie ersichtlich, geschah die Beschreibung der biologischen Verhältnisse auf rein praktischer Grundlage; immerhin enthält sie den Einfluss des Bodens, des Klimas und anderer biologischer Einflüsse, die auf das Wachstum der Bäume von Einfluss sind. Da die physikalischen, chemischen und biologischen Faktoren auf den Standorten I, II, III, IV, V. grosse Unterschiede aufweisen, ist es zu verstehen, dass sich diese Unterschiede im Wachstum der Bäume deutlich widerspiegeln. In der Tat definierte GUTTENBERG die fünf Standortklassen auf Grund des Wachstums der Bäume und zwar so, dass er jenen Standort, auf welchem die Fichte bei Panaveggio am besten gedeiht, I. Klasse, und wo sie am schlechtesten fortkommt, V. Klasse benannte. Sodann teilte er die anderen Standorte auf Grund der Wachstumsdifferenzen der Bäume so in Klassen, dass in diesen die Längenwachstumsdifferenzen gleich seien. Ich reproduziere GUTTENBERG's Originaltabelle, die die Wachstumsdifferenzen der auf verschiedenen Standorten gewachsenen Fichten zeigt.

Standortsklasse	Im Alter von 100 Jahren			Im Alter von 120 Jahren		
	Höhe m	Grundstärke cm	Abtriebsertrag f. m.	Höhe m	Grundstärke cm	Abtriebsertrag f. m.
I.	33	38	1000	36	42	1120
II.	28	33	780	31	37	880
III.	23	29	575	26	33	670
IV.	18	25	400	21	29	480
V.	13	21	225	15	24	280

Aus dieser Tabelle ersehen wir, dass zwischen den Standortklassen I—V, z. B. bei der Höhe der 100-jährigen Fichte ein Unterschied von je 5 m, bei der Dicke (in Brusthöhe 1·3 m gemessen) von cca 4 cm besteht. Die auf Grund der in der I—V. Tabelle ersichtlichen Originalmessungen gezeichnete Figur 1

zeigt uns, dass die auf den verschiedenen Standortklassen gefundenen Baumhöhen-Differenzen auf dieselbe Zeit bezogen dieselben bleiben. Dies spricht dafür, dass wir auf diesem Wege auf festem Boden wandeln.

Der Zusammenhang, den GUTTENBERG auf Grund des Baumhöhenwachstums zur Charakterisierung der Standortsverhältnisse aufstellte, muss sich auch in den Grössen w, r, a, b der gedämpften



Figur 1. H = Höhenwachstum in Metern, der auf den I—V. Standortklassen I—V. gewachsenen Fichten. Auf dem I. Standort wachsen die Bäume am schnellsten, auf dem V. am schlechtesten nach GUTTENBERG's Messungen.

Schwingung äussern. Zwischen den Koeffizienten w, r, a, b der auf den Standorten V—I, gewachsenen Fichten muss sich also, innerhalb der Versuchsfehlergrenzen, ein regelmässiger Grössenunterschied nachweisen lassen. Diesen Nachweis zu führen ist unser Zweck.

Die zu den Berechnungen von w, r, a, b nötigen Angaben finden wir in den Tabellen I—V; die das Baumlängenwachstum betreffenden, in der 2—5. Rubrik und die das Dickenwachstum betreffenden in der 6—10. Rubrik.

*

Untersuchen wir vorerst die *das Längenwachstum* betreffenden Angaben.

I. Tabelle.

Wachstum der Fichte (Picea excelsa Lk.) auf dem «*ausgezeichneten*» = *I. Standort,* auf Grund der Mittelwerte der von R. v. GUTTENBERG's an 21 Stämmen angestellten Messungen (l. c. p. 117.).

Zahl der Jahre	Höhenwachstum				Dickenwachstum				
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		D cm			$d = \triangle D / \triangle t$	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	korrigiert	berechnet	gemessen	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2·5	—	—	—	—	—	—	—	0·1667	0·167
6·5	—	—	0·2001	0·200	—	—	—	—	—
10·0	1·5	1·184	—	—	0·6	2·5	3·133	—	—
10·5	—	—	0·3065	0·334	—	—	—	0·5181	0·575
20·0	5·6	5·410	—	—	7·6	9·50	9·397	—	—
20·5	—	—	0·4847	0·494	—	—	—	0·6450	0·645
30·0	10·7	10·514	—	—	14·3	16·20	15·615	—	—
30·5	—	—	0·5128	0·513	—	—	—	0·5978	0·584
40·0	15·6	15·471	—	—	20·0	21·90	21·087	—	—
40·5	—	—	0·4663	0·468	—	—	—	0·5050	0·500
50·0	20·0	19·857	—	—	24·4	26·30	25·745	—	—
50·5	—	—	0·4058	0·401	—	—	—	0·4300	0·415
60·0	23·7	23·545	—	—	27·6	29·50	29·670	—	—
60·5	—	—	0·3393	0·330	—	—	—	0·3635	0·356
70·0	26·8	26·554	—	—	30·3	32·20	32·968	—	—
70·5	—	—	0·2709	0·266	—	—	—	0·3022	0·299
80·0	29·3	28·961	—	—	32·6	34·50	35·735	—	—
80·5	—	—	0·2189	0·211	—	—	—	0·2471	0·251
90·0	31·3	30·861	—	—	34·7	36·60	38·085	—	—
90·5	—	—	0·1848	0·166	—	—	—	0·2006	0·211
100·0	33·0	32·347	—	—	36·6	38·50	40·006	—	—
100·5	—	—	0·1592	0·129	—	—	—	0·1641	0·177
110·0	34·5	33·503	—	—	38·4	40·30	41·640	—	—
110·5	—	—	0·1382	0·100	—	—	—	0·1426	0·148
120·0	35·8	34·397	—	—	40·1	42·00	43·011	—	—
120·5	—	—	0·1252	0·077	—	—	—	0·1345	0·124
130·0	37·0	35·086	—	—	41·7	43·60	44·161	—	—
130·5	—	—	0·1132	0·060	—	—	—	0·1285	0·104
140·0	38·1	35·617	—	—	43·2	45·10	45·109	—	—
140·5	—	—	0·1015	0·045	—	—	—	0·1235	0·087
150·0	39·1	36·024	—	—	44·6	46·50	45·924	—	—
150·5	—	—	0·0970	0·035	—	—	—	0·1195	0·073

II. Tabelle.

Wachstum der Fichte (Picea excelsa Lk.) auf «*sehr guten*» = *II. Standort,* auf Grund der Mittelwerte der von R. v. GUTTENBERG's an 37 Stämmen angestellten Messungen (l. c. p. 118.).

Zahl der Jahre	Höhenwachstum				Dickenwachstum				
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		D cm			$d = \triangle D / \triangle t$	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	korrigiert	berechnet	gemessen	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2·5	—	—	—	—	—	—	—	0·1650	0·165
6·5	—	—	0·1477	0·148	—	—	—	—	—
10·0	1·20	0·738	—	—	—	—	2·360	—	—
10·5	—	—	0·2300	0·265	—	—	—	0·4406	0·501
20·0	4·50	4·156	—	—	6·4	7·90	8·255	—	—
20·5	—	—	0·3816	0·404	—	—	—	0·5500	0·550
30·0	8·70	8·338	—	—	11·9	13·40	13·528	—	—
30·5	—	—	0·4220	0·422	—	—	—	0·5036	0·493
40·0	12·80	12·445	—	—	16·4	17·90	18·123	—	—
40·5	—	—	0·3944	0·391	—	—	—	0·4205	0·419
50·0	16·40	16·149	—	—	20·0	21·50	22·001	—	—
50·5	—	—	0·3400	0·343	—	—	—	0·3560	0·351
60·0	19·40	19·354	—	—	23·0	24·50	25·244	—	—
60·5	—	—	0·2838	0·293	—	—	—	0·3045	0·293
70·0	21·90	22·098	—	—	25·0	27·00	27·948	—	—
70·5	—	—	0·2360	0·246	—	—	—	0·2557	0·244
80·0	24·00	24·337	—	—	27·7	29·20	30·201	—	—
80·5	—	—	0·1965	0·205	—	—	—	0·2107	0·203
90·0	25·80	26·222	—	—	29·7	31·20	32·077	—	—
90·5	—	—	0·1670	0·170	—	—	—	0·1723	0·169
100·0	27·40	27·781	—	—	31·5	33·00	33·635	—	—
100·5	—	—	0·1462	0·140	—	—	—	0·1434	0·141
110·0	28·80	29·068	—	—	33·1	34·60	34·940	—	—
110·5	—	—	0·1291	0·116	—	—	—	0·1304	0·117
120·0	30·00	30·128	—	—	34·6	36·10	36·024	—	—
120·5	—	—	0·1156	0·095	—	—	—	0·1280	0·098
130·0	31·10	31·002	—	—	36·0	37·50	36·926	—	—
130·5	—	—	0·1054	0·078	—	—	—	0·1280	0·081
140·0	32·20	31·721	—	—	37·4	38·90	37·677	—	—
140·5	—	—	0·0995	0·064	—	—	—	0·1280	0·068
150·0	33·20	32·312	—	—	38·7	40·20	38·302	—	—
150·5	—	—	0·0956	0·053	—	—	—	0·1280	0·056

III. Tabelle.

Wachstum der Fichte (Picea excelsa Lk.) auf «*guten*» = *III. Standort,* auf Grund der Mittelwerte der von R. v. GUTTENBERG's an 20 Stämmen angestellten Messungen (l. c. p. 118.).

Zahl der Jahre	Höhenwachstum				Dickenwachstum				
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		D cm			$d = \triangle D / \triangle t$	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	korrigiert	berechnet	gemessen	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2·5	—	—	—	—	—	—	—	0·0685	0·069
6·5	—	—	0·1156	0·116	—	—	—	—	—
10·0	1·0	0·555	—	—	—	—	1·479	—	—
10·5	—	—	0·1753	0·206	—	—	—	0·2375	0·289
20·0	3·3	3·183	—	—	3·9	4·10	4·975	—	—
20·5	—	—	0·2864	0·307	—	—	—	0·3880	0·388
30·0	6·2	6·360	—	—	8·2	9·40	8·904	—	—
30·5	—	—	0·3207	0·321	—	—	—	0·4005	0·390
40·0	9·3	9·493	—	—	12·0	13·20	12·680	—	—
40·5	—	—	0·3024	0·301	—	—	—	0·3687	0·360
50·0	12·2	12·374	—	—	15·1	16·30	16·113	—	—
50·5	—	—	0·2755	0·271	—	—	—	0·3320	0·322
60·0	14·8	14·948	—	—	17·8	19·00	19·163	—	—
60·5	—	—	0·2452	0·240	—	—	—	0·2885	0·284
70·0	17·1	17·216	—	—	20·1	21·30	21·845	—	—
70·5	—	—	0·2146	0·211	—	—	—	0·2407	0·249
80·0	19·1	19·202	—	—	22·2	23·40	24·193	—	—
80·5	—	—	0·1866	0·184	—	—	—	0·2022	0·218
90·0	20·9	20·938	—	—	24·2	25·40	26·244	—	—
90·5	—	—	0·1615	0·161	—	—	—	0·1807	0·190
100·0	22·5	22·451	—	—	26·0	27·20	28·034	—	—
100·5	—	—	0·1397	0·140	—	—	—	0·1707	0·166
110·0	23·9	23·771	—	—	27·7	28·90	29·595	—	—
110·5	—	—	0·1233	0·122	—	—	—	0·1607	0·145
120·0	25·1	24·921	—	—	29·2	30·40	30·958	—	—
120·5	—	—	0·1111	0·107	—	—	—	0·1507	0·126
130·0	26·2	25·922	—	—	30·7	31·90	32·145	—	—
130·5	—	—	0·1036	0·093	—	—	—	0·1407	0·110
140·0	27·2	26·796	—	—	32·1	33·30	33·181	—	—
140·5	—	—	0·0998	0·080	—	—	—	0·1307	0·096
150·0	28·2	27·556	—	—	33·4	34·60	34·085	—	—
150·5	—	—	0·0980	0·070	—	—	—	0·1207	0·084

IV. Tabelle.

Wachstum der Fichte (Picea excelsa Lk.) auf «*geringen*» = *IV. Standort,* auf Grund der Mittelwerte der von R. v. GUTTENBERG's an 21 Stämmen angestellten Messungen (l. c. p. 119.).

Zahl der Jahre	Höhenwachstum				Dickenwachstum				
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		D cm			$d = \triangle D / \triangle t$	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	korrigiert	berechnet	gemessen	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2·5	—	—	—	—	—	—	—	0·0675	0·068
6·5	—	—	0·0930	0·093	—	—	—	—	—
10·0	0·8	0·457	—	—	—	—	1·301	—	—
10·5	—	—	0·1387	0·161	—	—	—	0·2257	0·249
20·0	2·5	2·462	—	—	3·0	4·00	4·218	—	—
20·5	—	—	0·2159	0·231	—	—	—	0·3245	0·325
30·0	4·8	4·832	—	—	6·6	7·60	7·519	—	—
30·5	—	—	0·2388	0·239	—	—	—	0·3320	0·329
40·0	7·2	7·173	—	—	9·8	10·80	10·727	—	—
40·5	—	—	0·2268	0·226	—	—	—	0·3155	0·308
50·0	9·4	9·349	—	—	12·6	13·60	13·674	—	—
50·5	—	—	0·2094	0·207	—	—	—	0·2850	0·278
60·0	11·4	11·333	—	—	15·0	16·00	16·320	—	—
60·5	—	—	0·1900	0·188	—	—	—	0·2441	0·248
70·0	13·2	13·126	—	—	17·1	18·10	18·670	—	—
70·5	—	—	0·1715	0·169	—	—	—	0·2105	0·219
80·0	14·8	14·743	—	—	19·0	20·00	20·747	—	—
80·5	—	—	0·1552	0·153	—	—	—	0·1832	0·194
90·0	16·3	16·203	—	—	20·8	21·80	22·579	—	—
90·5	—	—	0·1410	0·137	—	—	—	0·1617	0·171
100·0	17·7	17·508	—	—	22·4	23·40	24·192	—	—
100·5	—	—	0·1300	0·124	—	—	—	0·1427	0·150
110·0	19·0	18·686	—	—	23·9	24·90	25·612	—	—
110·5	—	—	0·1200	0·111	—	—	—	0·1277	0·132
120·0	20·2	19·746	—	—	25·3	26·30	26·863	—	—
120·5	—	—	0·1105	0·100	—	—	—	0·1186	0·116
130·0	21·3	20·699	—	—	26·7	27·70	27·963	—	—
130·5	—	—	0·1020	0·090	—	—	—	0·1176	0·102
140·0	22·3	21·556	—	—	28·0	29·00	28·931	—	—
140·5	—	—	0·0945	0·081	—	—	—	0·1176	0·090
150·0	23·2	22·328	—	—	29·3	30·30	29·783	—	—
150·5	—	—	0·0880	0·073	—	—	—	0·1176	0·079

V. Tabelle.

Wachstum der Fichte (Picea excelsa Lk.) auf «*sehr geringen*» = *V. Standort*, auf Grund der Mittelwerte der von R. v. Guttenberg's an 8 Stämmen angestellten Messungen (l. c. p. 119.).

Zahl der Jahre	Höhenwachstum				Dickenwachstum				
	H meter		$h = \triangle H / \triangle t$		D cm			$d = \triangle D / \triangle t$	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	korrigiert	berechnet	gemessen	berechnet
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2·5	—	—	—	—	—	—	—	0·0357	0·036
6·5	—	—	0·0540	0·054	—	—	—	—	—
10·0	0·3	0·187	—	—	—	—	0·878	—	—
10·5	—	—	0·0820	0·103	—	—	—	0·1265	0·155
20·0	1·3	1·501	—	—	—	—	2·806	—	—
20·5	—	—	0·1376	0·154	—	—	—	0·2200	0·220
30·0	2·8	3·093	—	—	3·6	4·40	5·141	—	—
30·5	—	—	0·1630	0·163	—	—	—	0·2513	0·241
40·0	4·4	4·666	—	—	6·7	7·50	7·569	—	—
40·5	—	—	0·1614	0·159	—	—	—	0·2476	0·241
50·0	6·1	6·280	—	—	9·3	10·10	9·941	—	—
50·5	—	—	0·1540	0·152	—	—	—	0·2400	0·231
60·0	7·7	7·766	—	—	11·6	12·40	12·189	—	—
60·5	—	—	0·1457	0·144	—	—	—	0·2275	0·217
70·0	9·2	9·171	—	—	13·6	14·40	14·288	—	—
70·5	—	—	0·1380	0·136	—	—	—	0·2105	0·201
80·0	10·6	10·498	—	—	15·4	16·20	16·231	—	—
80·5	—	—	0·1313	0·129	—	—	—	0·1901	0·186
90·0	11·9	11·751	—	—	17·1	17·90	18·024	—	—
90·5	—	—	0·1250	0·121	—	—	—	0·1709	0·171
100·0	13·1	12·934	—	—	18·7	19·50	19·672	—	—
100·5	—	—	0·1185	0·115	—	—	—	0·1552	0·157
110·0	14·2	14·049	—	—	20·2	21·00	21·186	—	—
110·5	—	—	0·1109	0·108	—	—	—	0·1426	0·144
120·0	15·2	15·102	—	—	21·7	22·50	22·576	—	—
120·5	—	—	0·1027	0·102	—	—	—	0·1328	0·133
130·0	16·1	16·096	—	—	23·1	23·90	23·852	—	—
130·5	—	—	0·0938	0·096	—	—	—	0·1244	0·122
140·0	16·9	17·033	—	—	24·4	25·20	25·022	—	—
140·5	—	—	0·0845	0·091	—	—	—	0·1184	0·112
150·0	17·7	17·918	—	—	25·6	26·40	26·096	—	—
150·5	—	—	0·0747	0·086	—	—	—	0·1134	0·102

VI. Tabelle.

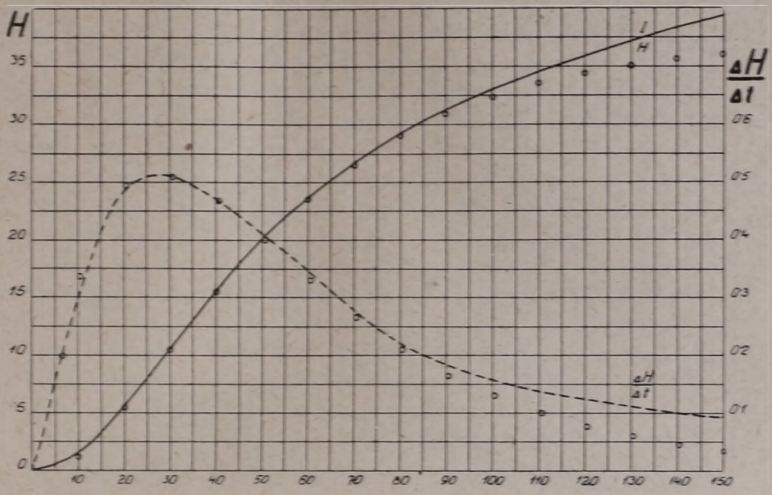
Über die Grössen der Koeffizienten der aperiodisch gedämpften Schwingungen, die das *Höhenwachstum* der auf den Standortklassen I—V gewachsenen Fichten ausdrücken. Ich berechnete den Wert von r und w aus $t_1 = 10{\cdot}5$, $t_2 = 30{\cdot}5$, $t_3 = 50{\cdot}5$, $t_4 = 70{\cdot}5$ Jahre; die Koeffizienten a und b aus $t_1 = 6{\cdot}5$ und $t_2 = 30{\cdot}5$ Jahre.

Standortsklasse	r	w	a	b
I.	0·04207	0·03922	4·0500	— 4·3539
II.	0·04570	0·03747	2·0100	— 2·3529
III.	0·05106	0·03489	1·1218	— 1·4106
IV.	0·05672	0·03301	0·7162	— 0·9416
V.	0·06087	0·02593	0·4103	— 0·6100

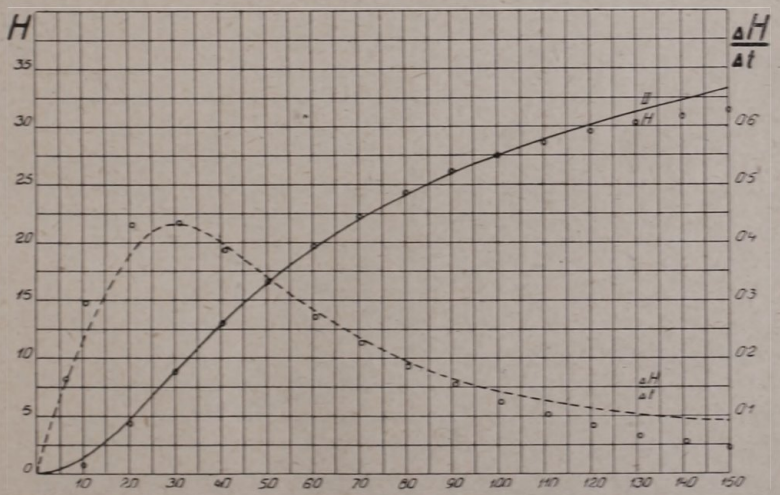
VII. Tabelle.

Über die Grössen der Koeffizienten der aperiodisch gedämpften Schwingungen, die das *Dickenwachstum* der auf den Standortklassen I—V gewachsenen Fichten ausdrücken. Ich berechnete den Wert von r' und w' aus $t_1 = 5{\cdot}5$, $t_2 = 20{\cdot}5$, $t_3 = 35{\cdot}5$, $t_4 = 50{\cdot}5$ Jahre; die Koeffizienten a' und b', aus $t_1 = 2{\cdot}5$ und $t_2 = 20{\cdot}5$ Jahre.

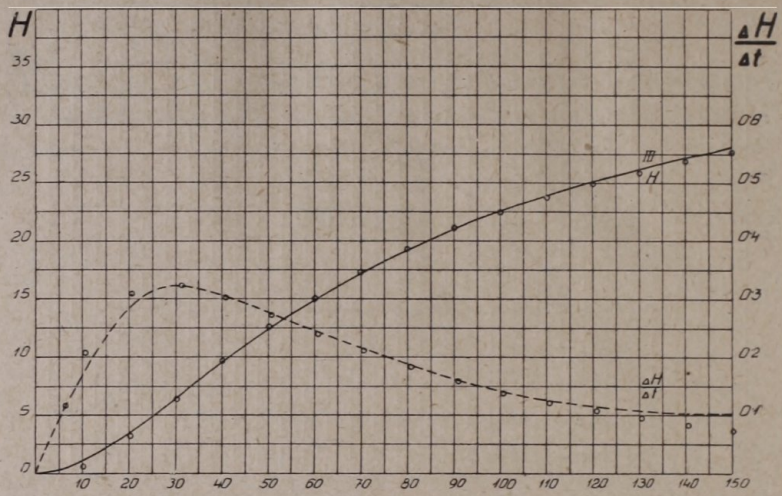
Standortsklasse	r'	w'	a'	b'
I.	0·07520	0·04832	2·0649	— 2·2897
II.	0·07661	0·04900	1·7763	— 1·9152
III.	0·05282	0·03548	1·3138	— 1·4254
IV.	0·05054	0·03359	1·0867	— 1·1442
V.	0·03849	0·02430	0·7518	— 0·7702



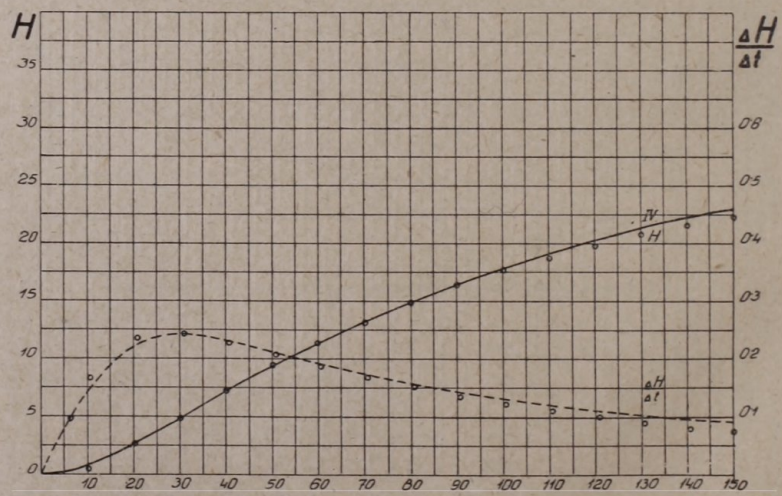
Figur 2. H=Höhe in Metern, der auf Standortklasse I gewachsenen Fichten (vollausgezogene Linie). $\triangle H/\triangle t$ = Höhenwachstum (unterbrochene Linie) nach GUTTENBERG's Messungen. Die eingekreisten Punkte stellen die mit den Gleichungen (1) und (3) berechneten Grössen dar.



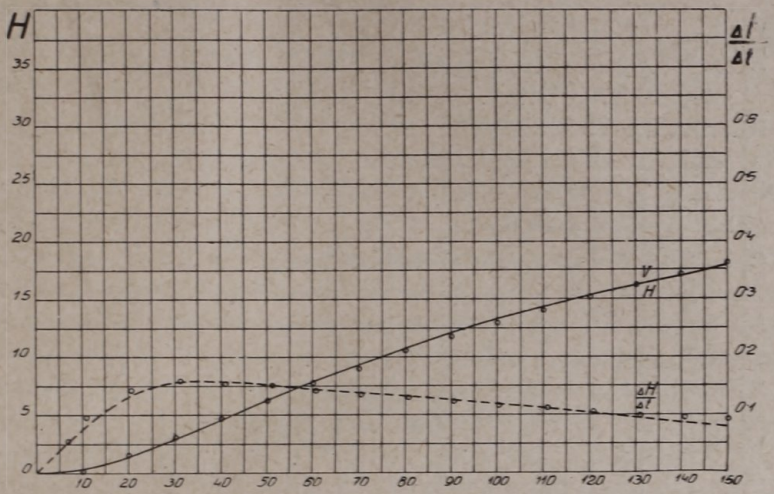
Figur 3. H = Höhe in Metern, der auf Standortklasse II gewachsenen Fichten (vollausgezogene Linie). $\triangle H/\triangle t$ = Höhenwachstum (unterbrochene Linie) nach GUTTENBERG's Messungen. Die eingekreisten Punkte stellen die mit den Gleichungen (1) und (3) berechneten Grössen dar.



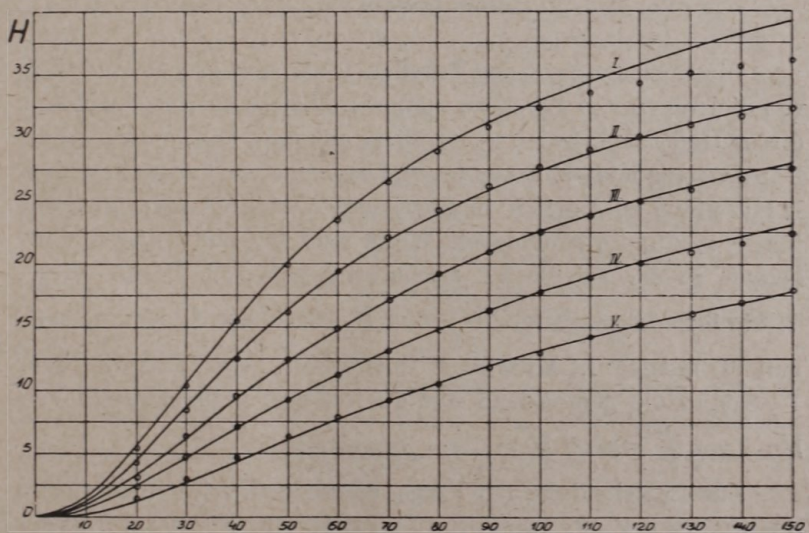
Figur 4. H = Höhe in Metern, der auf Standortklasse III gewachsenen Fichten (vollausgezogene Linie). $\triangle H/\triangle t$ = Höhenwachstum (unterbrochene Linie) nach GUTTENBERG's Messungen. Die eingekreisten Punkte stellen die mit den Gleichungen (1) und (3) berechneten Grössen dar.



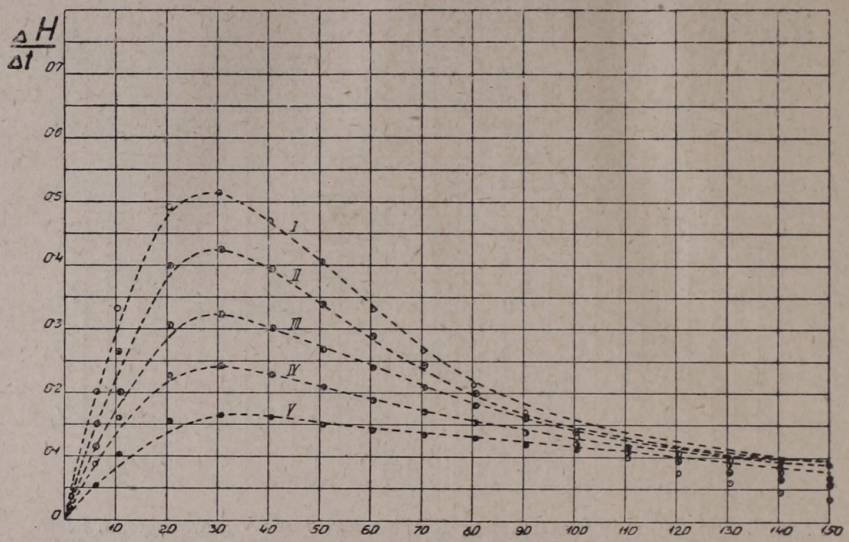
Figur 5. H = Höhe in Metern, der auf Standortklasse IV gewachsenen Fichten (vollausgezogene Linie). $\triangle H/\triangle t$ = Höhenwachstum (unterbrochene Linie) nach GUTTENBERG's Messungen. Die eingekreisten Punkte stellen die mit den Gleichungen (1) und (3) berechneten Grössen dar.



Figur 6. H = Höhe in Metern, der auf Standortklasse V gewachsenen Fichten (vollausgezogene Linie). $\triangle H / \triangle t$ = Höhenwachstum (unterbrochene Linie) nach GUTTENBERG's Messungen. Die eingekreisten Punkte stellen die mit den Gleichungen (1) und (3) berechneten Grössen dar.



Figur 7. H = Höhe in Metern, der auf den Standortklassen I—V gewachsenen Fichten (vollausgezogene Linie), nach GUTTENBERG's Messungen. Die eingekreisten Punkte stellen die mit der Gleichung (3) berechneten Grössen dar.



Figur 8. $\triangle H/\triangle t$ = Höhenwachstum in Metern, der auf den Standortklassen I—V gewachsenen Fichten (unterbrochene Linie) nach GUTTENBERG's Messungen. Die eingekreisten Punkte stellen die mit der Gleichung (1) berechneten Grössen dar.

Die Rubriken 2—4 der Tabellen I—V. sind ebenso verfertigt, wie diejenigen von Tabelle I. meiner I. Mitteilung. Mit Benützung dieses Materials habe ich w, r resp. m aus $h_{10\cdot5}$, $h_{30\cdot5}$, $h_{50\cdot5}$, $h_{70\cdot5}$, die Konstanten a und b aber aus $h_{6\cdot5}$ und $h_{30\cdot5}$ genau nach dem in meiner I. Mitteilung ausführlich vorgetragenen Verfahren berechnet. Die für w, r, a und b gefundenen Werte sind für alle fünf Standortklassen in der Tabelle VI. zusammengestellt. Im Besitze dieser Werte habe ich dann $h = \frac{dH}{dt}$ und H mittels den Gleichungen (1) und (3) meiner I. Mitteilung theoretisch berechnet. In Figur 1—8 sind die gemessenen und die theoretisch berechneten Verlaufe von $\frac{dH}{dt}$ und H grafisch dargestellt.

Zur Entscheidung der Frage, *ob die Koeffizienten w, r, a, b der auf den V—I. Standorten gewachsenen Bäume sich in der Tat so verhalten, dass man aus ihnen auf bestimmte Regelmässigkeiten schliessen könnte,* genügt es die den V—I. Standorten entsprechenden Baumhöhen, und die zu ihnen gehörigen

M.T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

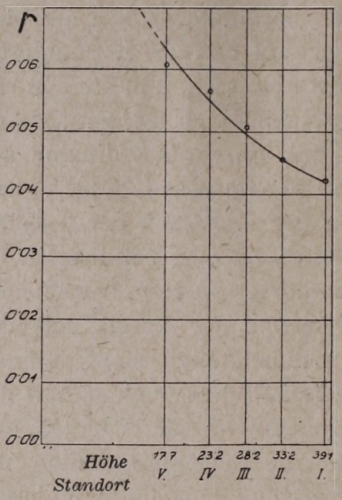
Koeffizienten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem aufzutragen. Tragen wir also die Höhen der auf den V—I. Standorten gewachsenen 150-jährigen Bäume als Abscissen, und die den einzelnen Standorten entsprechenden Koeffizienten w_{V}, w_{IV}, $w_{III}\cdots$, r_{V}, r_{IV}, $r_{III}\cdots$, a_{V}, a_{IV}, $a_{III},\cdots$ b_{V}, b_{IV}, $b_{III}\cdots$ als Ordinaten auf. Die den Baumhöhen entsprechenden Höhenmaasse 17·7 *m*, 23·2 *m*, 28·2 *m*, 33·2 *m*, 39·1 *m* finden wir in der 2. Rubrik der Tabellen I—V, die Daten über die Koeffizienten *w*, *r*, *a*, *b* in der VI. Tabelle; auf deren Grund zeichnete ich die *r*, *w*, *a* resp. betreffenden Figuren 9—12. Da das Höhenwachstum der Bäume mit den biologischen Verhältnissen im Zusammenhange steht, müssen die auf die Abscisse aufgetragenen Baumhöhen zugleich mit den biologischen Verhältnissen proportionelle Grössen bedeuten, also müssen die bei *w*, *r*, *a*, *b* gefundenen Regelmässigkeiten mit den biologischen Verhältnissen im funktionellen Zusammenhange stehen.

Wenn wir nun die in Fig. 9—12 gezeichneten w_{V}, w_{IV}, $w_{III}\cdots$, r_{V}, r_{IV}, $r_{III}\cdots$, a_{V}, a_{IV}, $a_{III}\cdots$, b_{V}, b_{IV}, $b_{III}\cdots$ bedeutenden Punkte mit einer die wahrscheinlichen Mittelwerte bedeutende Linie verbinden, so ergibt sich das Bild des Zusammenhanges, wie es den biologischen Verhältnissen der Bäume und den Koeffizienten der gedämpften Schwingung entspricht. Die in den Fig. 9—12 die eingekreisten Punkte verbindenden Linien sind diese Kurven. Wir sehen, dass in diesen Beispielen *r* umso kleiner ist, je besser der Standort, die Koeffizienten *w*, *a*, *b* hingegen umso grösser sind, je besser der Standort, d. h. je besser die biologischen Verhältnisse sind. (Zu bemerken ist, dass *b* ein negativer Wert ist und eine negative Zahl ist umso grösser, je kleineren absoluten Wert sie hat.)

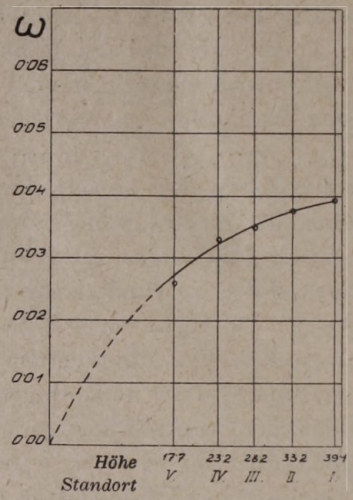
Auf Grund dieser Erfahrung kann ich feststellen, dass *die Koeffizienten der das Längenwachstum der Bäume ausdrückenden aperiodisch gedämpften Schwingung sich mit den biologischen Verhältnissen ändern.*

*

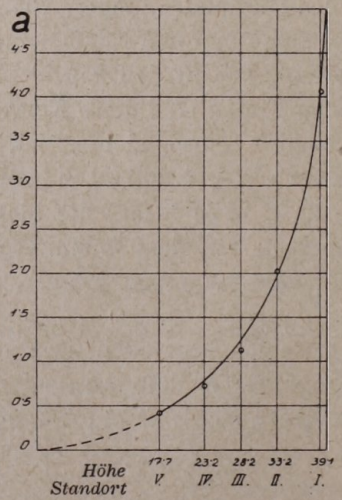
Untersuchen wir nun *das Dickenwachstum derselben Fichten.* Die Originalmassangaben GUTTENBERG's finden wir in der 6. Rubrik der Tabellen I—V.



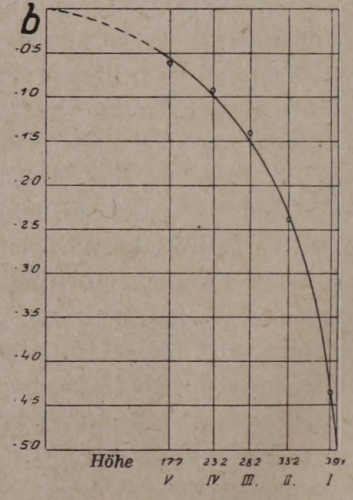
Figur 9. Die Veränderung des Koeffizienten r je nach den biologischen Verhältnissen, resp. je nach den Standortklassen.



Figur 10. Die Veränderung des Koeffizienten w je nach den biologischen Verhältnissen, resp. je nach den Standortklassen.



Figur 11. Die Veränderung des Koeffizienten a je nach den biologischen Verhältnissen, resp. je nach den Standortklassen.



Figur 12. Die Veränderung des Koeffizienten b je nach den biologischen Verhältnissen, resp. je nach den Standortklassen.

Diese Angaben musste ich ebenso korrigieren, wie in meiner I. Mitteilung. So entstand die Rubrik 9 der Tabellen I—V. Im Übrigen sind die auf das Dickenwachstum bezüglichen Rubriken der Tabellen I—V, ferner Tabelle VII und die Figuren 13—18 genau so beschaffen, wie die auf das Höhenwachstum bezüglichen Rubriken, Tabellen und Figuren.[1] Die in der Tabelle VII angegebenen Werte von w' und r' habe ich aus $d_{5\cdot5}$, $d_{20\cdot5}$, $d_{35\cdot5}$, $d_{50\cdot5}$, die Werte von a' und b' aus $d_{2\cdot5}$ und $d_{20\cdot5}$ berechnet.

Bezüglich der Koeffizienten $w'\ r'\ a'\ b'$ des Baumdickenwachstums sehen wir dieselbe Regelmässigkeit, wie beim Längenwachstum, nämlich: je besser der Standort ist, desto grösser sind die Koeffizienten $w'\ a'\ b'$. Nicht so bezüglich r'. Beim Längenwachstum wird r mit der Güte des Standortes abnehmen, beim Dickenwachstum hingegen wird r' damit zunehmen.

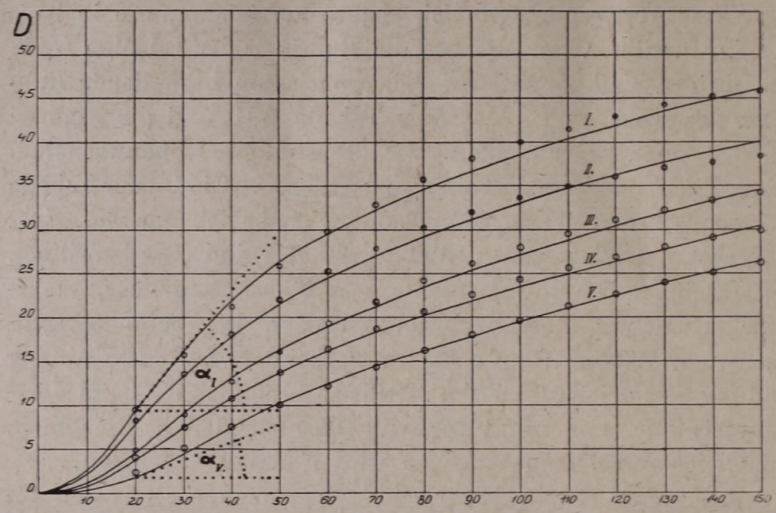
Aber auch für r' (wie für $w'\ a'\ b'$) ersehen wir aus den Figuren, dass *zwischen der Qualität des Standortes der Bäume und den Koeffizienten der aperiodisch gedämpften Schwingung ein regelmässiger Zusammenhang besteht.*

*

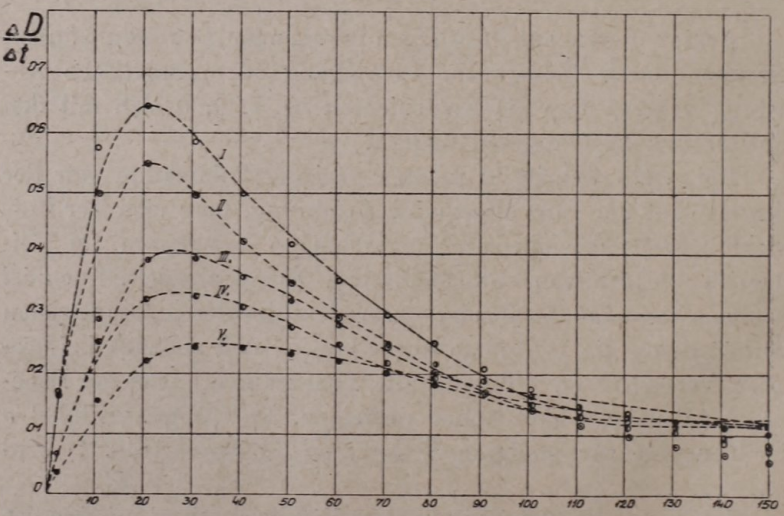
Ausser diesen auf Messungen beruhenden Beweisen können wir auch durch theoretische Überlegung oder analytische Ableitung zeigen, dass die Koeffizienten w, r, a, b sich mit den biologischen Verhältnissen ändern.

Der erste Schritt in meiner vorigen Publikation war der Hinweis auf die ganz allgemeine Erfahrung, dass sich der Entwicklungsgang der ein- und mehrzelligen Lebewesen im Zeichen der S förmigen ontogenetischen Kurve abspielt. Auch ist es eine allgemeine Erfahrung, dass bei schlechteren biologischen Verhältnissen die S förmige Kurve minder steil ansteigt, bei besseren Verhältnissen hingegen alle Lebensäusserungen der Lebewesen in gleicher Zeit höher ansteigen. Der Neigungswinkel α der Tangente zur steileren S förmigen (3) Kurve (Fig. 1) wird

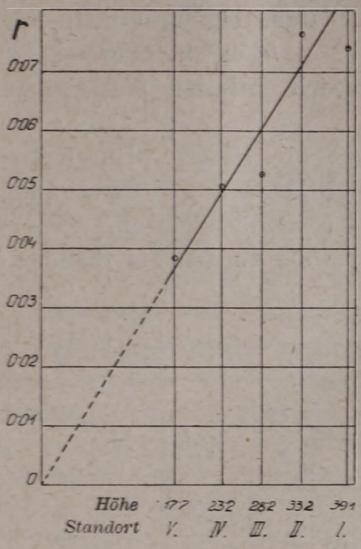
[1] Alle Tabellen und Figuren dieser Mitteilung zeigen zwischen den gemessenen und der theoretisch berechneten Werten eine befriedigende Übereinstimmung, was die Erfahrungen und Schlüsse meiner I. Mitteilung bekräftigt.



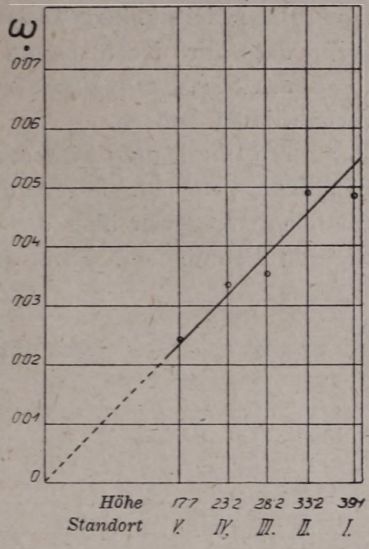
Figur 13. D = Dicke in Metern, der auf I—V. Standortklassen gewachsenen Fichten (vollausgezogene Linie), nach GUTTENBERG's Messungen. Die eingekreisten Punkte stellen die mit der Gleichung (3) berechneter Grössen dar.



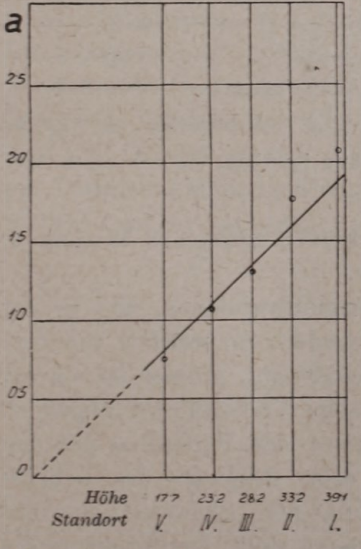
Figur 14. $\triangle D/\triangle t$ = Dickenwachstum in Metern, der auf I—V Standortklassen gewachsenen Fichten (unterbrochene Linie), nach GUTTENBERG's Messungen. Die eingekreisten Punkte stellen die mit der Gleichung (1) berechneten Grössen dar.



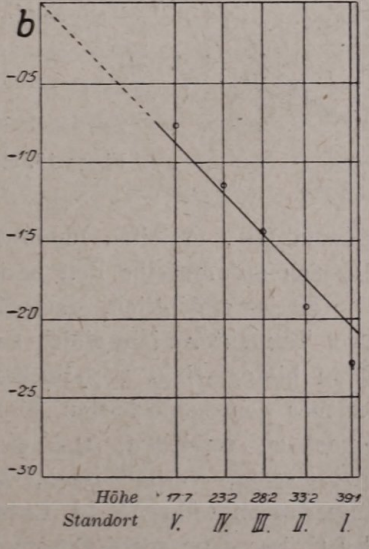
Figur 15. Der beim Dickenwachstum des Baumes fungierende Koeffizient r' ändert sich je nach den biologischen Verhältnissen, resp. je nach den Standortklassen.



Figur 16. Der beim Dickenwachstum des Baumes fungierende Koeffizient w' ändert sich je nach den biologischen Verhältnissen, resp. je nach den Standortklassen.



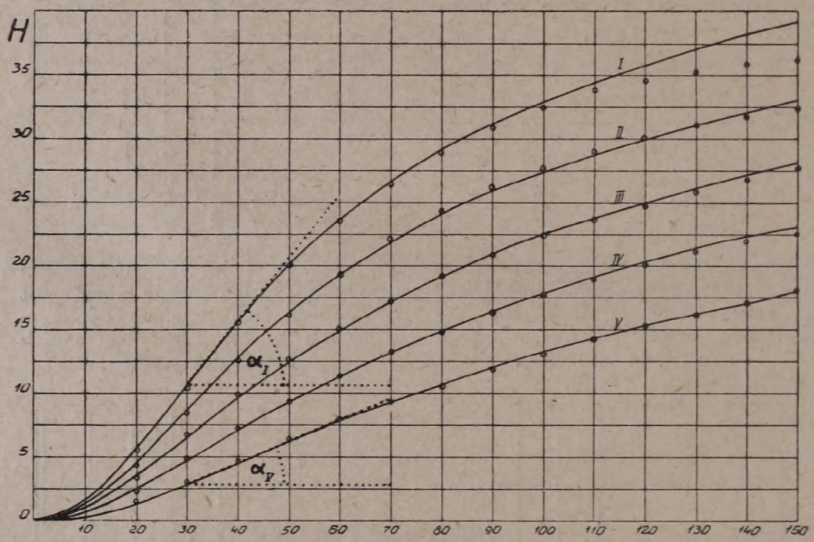
Figur 17. Der beim Dickenwachstum des Baumes fungierende Koeffizient a' ändert sich je nach den biologischen Verhältnissen, resp. je nach den Standortklassen.



Figur 18. Der beim Dickenwachstum des Baumes fungierende Koeffizient b' ändert sich je nach den biologischen Verhältnissen, resp. je nach den Standortklassen.

zum selben Zeitpunkt grösser sein, daraus folgt rein mathematisch, dass die Koeffizienten w, r, a, b in der Formel für $s = lim \triangle S/\triangle t = ds/dt = tang\ a$ sich mit den biologischen Verhältnissen ändern.

Diese Überlegung wird durch die Fig. 13 resp. 19 noch verständlicher gemacht. Sie zeigt die durch Messung und Berechnung erhaltenen Angaben über die auf den Standortklassen I—V erreichten Baumhöhen. Dann zeigt sie die zu den auf Standort-



Figur 19. Erklärung im Text.

klassen I—V erzielten Baumhöhenkurven gezogenen Tangenten, die sich auf dieselbe Zeit beziehen.

Es ist ersichtlich, dass die Neigungswinkel a_I und a_V der zwei Tangenten nicht gleich sind, sondern a_I, welches den besseren biologischen Verhältnissen entspricht, grösser ist als a_V, welches den schlechteren biologischen Verhältnissen angehört. Es ist zu verstehen, dass die Grösse des Winkels a mit den biologischen Verhältnissen, mit dem Resultate der Lebensäusserungen während der Entwicklung der Lebewesen, also mit der Grösse S im engen Zusammenhange steht. Die Tangente des

Winkel α ist nämlich identisch mit dem nach der Zeit gebildeten Differentquotienten, also

$$tang\ \alpha = lim\ \Delta\ S/\Delta\ t = dS/dt = s.$$

dessen Wert bestimmt wird durch die Gleichung der aperiodisch gedämpften Schwingung (Gleichung (1) der I. Mitteilung). Eine einfache mathematische Überlegung besagt, dass dieselbe Gleichung nur dann zur selben Zeit t einen anderen Wert für $tang\ \alpha = s$ ergeben kann, wenn die Koeffizienten w, r, a, b sich entsprechend den biologischen Verhältnissen ändern.

Da unsere grundlegenden Erfahrungen über den Zusammenhang zwischen der Steigung der S förmigen Kurve und der Zuträglichkeit der biologischen Verhältnisse nach obigem allgemeingültig sind, sowohl bei ein- als bei mehrzelligen pflanzlichen und tierischen Lebewesen, so folgt zwingend, dass auch obige mathematische Deduktion allgemeingültig für alle Organismen ist.

Wir können also aus dem bisher vorgebrachten für bewiesen erachten, dass *die Gesetzmässigkeit im Wachstum der Lebewesen und im Ablauf verschiedener mit dem Wachstum zusammenhängender Lebenserscheinungen mit der Gesetzmässigkeit der aperiodisch gedämpften Schwingung übereinstimmt, wobei die Koeffizienten w, r, a, b der gedämpften Schwingung je nach den biologischen Verhältnissen veränderlich sind.*

Bei der Veränderlichkeit der Koeffizienten w, r, a, b je nach den biologischen Verhältnissen sind wir imstande mit Hilfe der Gleichung der gedämpften Schwingung den Ablauf der Lebenserscheinungen mit gewünschter Genauigkeit auszudrücken und zu verfolgen.

ERLÄUTERUNGEN DER GESETZMÄSSIGKEITEN IM ABLAUFE DER LEBENSERSCHEINUNGEN LEBENDER WESEN.

(III. Mitteilung.) [1]

Von FRANZ KÖVESSI (Sopron).

Vorgelegt der III. Klasse der Ung. Akademie der Wiss. in der Sitzung vom 4. Juni 1928 durch A. MÁGOCSY-DIETZ, ord. Mitglied der Akademie.

Biophysikalische Erklärung der beim Wachstum fungierenden Koeffizienten der gedämpften Schwingung.

In den vorangehenden beiden Mitteilungen brachte ich den Beweis, dass die Gesetzmässigkeit im Wachstum und in verschiedenen damit zusammenhängender Lebenserscheinungen übereinstimmt mit der Gesetzmässigkeit der aperiodisch gedämpften Schwingung (wenn man die Elongation s der Schwingungen mit jener Lebenserscheinung proportional annimmt), wobei jedoch die Koeffizienten w, r, a, b der gedämpften Schwingung sich je nach den biologischen Verhältnissen mit der Zeit ändern. Also sind w, r, a, b Funktionen der Zeit, was wir mit den Zeichen $w(t)$, $r(t)$, $a(t)$, $b(t)$ ausdrücken können. Die Veränderlichkeit dieser Grössen können wir am leichtesten verstehen, wenn wir die Entwicklung der im Freien lebenden Pflanzen beeinflussenden Witterungsschwankungen beobachten, z. B. wenn wir an

[1] Ungarisch auszüglich erschienen unter dem Titel: *Az élőlények fejlődése szabályosságának a magyarázata.* Mathematikai és Természettudományi Értesítő XLV (1928, S. 678—687). Daselbst auch die Kurze Zusammenfassung in deutscher Sprache unter dem Titel: *Erläuterungen der Gesetzmässigkeiten im Verlaufe der Lebenserscheinungen lebender Wesen.* III. Mitteilung S. 688—689.

die Jahres- oder Tagesschwankungen der Temperatur denken. Die Temperaturschwankungen halten im Grossen und Ganzen Schritt mit dem Ablauf der Zeit und dieser Faktor spielt in den Ausdrücken $w(t)$, $r(t)$, $a(t)$, $b(t)$ (wenn auch in heute noch nicht in bekannter Weise) unbedingt mit, ebenso wie eine ganze Reihe physikalischer, chemischer und biologischer Faktoren.

Da wir die Funktionen $w(t)$, $r(t)$, $a(t)$, $b(t)$ heute noch nicht kennen, ist es uns nicht möglich mit ihnen zu operieren. Darum müssen wir als erste Annäherung die Annahme konzedieren, dass die biologischen Verhältnisse (wie wir dies bei den auf gleichen Standortklassen gewachsenen Fichten sahen) sich in so geringem Masse ändern, dass die Koeffizienten w, r, a, b auch konstant angenommen, nahezu dem wirklichen Wachstumsgange entsprechen.

Nach dieser Einschränkung werde ich aus meinen in den vorigen Mitteilungen dargestellten Feststellungen wichtige Schlüsse ziehen, die zu der biophysikalischen Erklärung der Koeffizienten w, r, a, b führen.

Die harmonische Schwingung ist in der anorganischen Natur eine häufige Erscheinung und wichtige Bewegungsform. Auch ihre aperiodische Dämpfung ist wohlbekannt.[1]

Durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -w^2s - 2r\frac{ds}{dt}$$

der gedämpften harmonischen Schwingung wird die Beschleunigung $\frac{d^2s}{dt^2}$ als die Summe zweier Glieder ausgedrückt. Das erste Glied, $-w^2s$, entspricht einer Kraft, die an und für sich eine ungedämpfte Schwingung verursachte. Diese Kraft ist mit der Elongation s (der Entfernung von der Ruhelage) proportional und der Ruhelage zugewendet. Das zweite Glied, $-2r\frac{ds}{dt}$, entspricht dem Widerstande, durch den die Beweguug gedämpft wird. Er

[1] Die auf sie bezüglichen wichtigsten Formeln sind in meiner I. Mitteilung zusammengestellt.

ist mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ proportional und ihr entgegengesetzt gerichtet.

Die Übereinstimmung der Gesetzmässigkeit der von uns betrachteten Lebenserscheinungen mit derjenigen der aperiodisch gedämpften Schwingungen, führt uns zu der Folgerung, dass auch *im lebenden Organismus eine Kraft und ein Widerstand im Spiele sind.*

Die Existenz dieser Kraft ist nicht etwa eine mystische Hypothese, sondern eine physikalisch, chemisch und physiologisch verständliche und messbare Wirklichkeit. Wir wissen nämlich, dass Wachstum und Vermehrung der Lebewesen mit Arbeitsverbrauch verbunden ist. Zweck der Ernährung ist, dass der Organismus mit ihrer Hilfe die Energie erzeuge, welche die Arbeit des Wachstums und der Vermehrung und den diese begleitenden, mit Wärmeproduktion einhergehenden Energieverbrauch ersetzt.

Die als Nahrung gebrauchten chemischen Verbindungen formen sich im Organismus in andere Verbindungen um. Die Gesamtenergiemengen, die zu Beginn und zum Schluss der Umformung vorhanden waren, sind nicht gleich, sondern zum Schluss sind die Energiemengen der entstandenen Zersetzungsprodukte stets verringert. Durch die Differenz zwischen dem Energiegehalt in diesen zwei Stadien, also durch die freiwerdende Energie, wird das Zellwachstum, die Vermehrung usw. in Funktion gehalten. Nach meiner Meinung entsteht in der lebenden Zelle aus der in ihr freiwerdenden chemischen (potentiellen) Energie eine spezielle Energieform, die ich *biomotorische Energie* nenne.

Die Herkunft der biomotorischen Energie kann bei solchen Lebewesen, die sich von organischen Verbindungen nähren, auf die elektromagnetische Energie der sonnenstrahlen zurückgeführt werden, welche in den chlorophyllhältigen grünen Pflanzen im Verlaufe des chemischen Vorganges der Assimilation in organischen Verbindungen — chemischer potenzieller Energie — gebunden wird. Wenn der Organismus diese Verbindungen im Laufe der Ernährung löst und aus den mehr Energie enthalten-

den Verbindungen weniger Energie enthaltende Verbindungen entstehen, z. B. wenn aus Zucker durch Verbrennung in der Zelle Kohlendioxyd und Wasser entsteht, so wird die Differenz zwischen dem, nurmehr — vom Standpunkte der lebenden Zelle — unbrauchbare Energie enthaltenden Kohlendioxyd und Wasser, und zwischen den 3741 gr. Kal. Energie des Zuckers z. B. der *d*-Glukose, dem Lebewesen zu Verfügung stehen, um daraus seinen Energieverbrauch zu decken.[1]

Nach meiner Ansicht wird die chemische potentielle Energie, wenn sie in der lebenden Zelle frei wird, wahrscheinlich nebst Wärmebildung eine andere Erscheinungsform der Energie annehmen, die ich eben *biomotorische Energie* nenne. Diese spezielle Energie befähigt den lebenden Organismus zu einer speziellen Arbeit. Sie leistet die Arbeit des Zellwachstums, der Vermehrung, der Ernährung und inzwischen wird ein Teil dieser Energie zufolge der Widerstände, Reibungen, Bewegungen, chemischen Umsetzungen usw. in Wärme umgewandelt, wie wir dies bei der mechanischen Arbeit zu sehen gewohnt sind.

Diese Erscheinungsform der Energie darf nicht verwechselt werden mit der mystischen Lebenskraft der Vitalisten. Wovon ich rede, ist eine spezielle Erscheinungsform der allgemeinen Energie, hat also nichts mystisches an sich. Der Proportionalitätsfaktor dieser biomotorischen Energie ist w.

Es muss auch betont werden, dass gewisse Betätigungen der biomotorischen Energie, wenn auch mit grossem Verluste, aber immerhin in andere Energieerscheinungsformen umwandelbar sind.

Stellen wir uns etwa vor, dass wir mit Hilfe der Arbeit von Menschen oder Tieren Gewichte viele Meter hoch heben und sie dann herunter fallen lassen und so mit der auf Kosten der biomotorischen Energie erzeugten Graviationsenergie einen elektrischen Generator treiben, der Licht erzeugt. Mit diesem Lichte

[1] Präciser ausgedrückt, steht eigentlich nicht die 3741 gr. Kal. Verbrennungswärme zur Verfügung des Organismus, sondern die bei diesem Vorgange auftretende Energieänderung. Nach dem NERNST'schen Wärmetheorem besteht bei der Verbrennung von Kohle und Kohlenhydraten zwischen den zwei Grössen kein wesentlicher Unterschied.

lassen wir Pflanzen wachsen, die nachdem sie entwickelt sind, unter dem Dampfkessel verbrannt werden. Durch die auf diese weise in der Dampfmaschine erzielte Dampfspannkraft wollen wir eine Drehbewegung erzeugen, diese mit Hilfe des elektrischen Generators wieder in Elektrizität, dann in Licht umformen, mit welchem wir wieder Pflanzen, z. B. Getreide wachsen lassen. Ernährt dies Menschen oder Tiere, so wird die in der Nahrung sich befindende chemische potentielle Energie von neuem in biomotorische Energie umgeformt, die man wieder in irgend eine Erscheinungsform der Energie umwandeln kann. Daraus ist ersichtlich, dass die im lebenden Organismus wirkende biomotorische Energie nicht irgend etwas mystisches ist, sondern eine spezielle Erscheinungsform der allgemeinen Energie; auch sie ist eine *potenzielle Energie.*

Der im Organismus wirkende r Proportionalitätsfaktor der Hemmung $-2r\,ds/dt$ ist nicht ein Koeffizient eines später auftretenden sekundären Vorganges. Es scheint, er repräsentiert das mit der Entwicklung einhergehende Alter, und ist, wie es sich später (8) zeigen wird, schon im Anfangsmoment des Zellwachstums vorhanden in Verbindung mit dem Koeffizienten w der Energie und einem dritten, später einzuführenden v_0 = Anfangsgeschwindigkeitskoeffizienten.

Über die Dämpfung $-2\,rds/dt$ und über den Proportionalitätsfaktor r können wir ausser den analytischen und mechanischen Gleichungen und den bisherigen Aufklärungen, die uns die Anatomie und Zellenlehre bietet, nicht viel mehr sagen; höchstens, dass ihr Sitz jedenfalls in der lebenden Substanz der Zelle ist, deren mit dem Alter und den biologischen Verhältnissen sich ändernde Konstruktion und Zusammensetzung bis zu einem gewissen Grade Schritt hält mit der Grösse des Dämpfungsfaktors, also mit den Änderungen der biologischen Verhältnisse laut Koeffizient r.

Auf Grund des Vorgebrachten stelle ich mir das Leben so vor, *dass die biomotorische Energie sich in den dazu geeigneten Stoffen nach ihren speziellen Gesetzen ausbreitet und dadurch die Stoffe «organisiert», also lebend macht. Sie leben, so lange diese Energie in ihnen wirkt; wenn sie zu wirken aufhört, tritt der Tod ein.*

*

Ist es uns in dem Vorgehenden gelungen, die Koeffizienten w und r zu verstehen, so suchen wir nun die Deutung der Koeffizienten a und b. Zu diesem Zwecke müssen wir die zu Beginn der Entwicklung eines Lebewesen sich abspielenden Verhältnisse in Betracht ziehen und müssen ihre Ergebnisse in die Sprache der Mechanik übersetzen, um auf diesem Gebiete weiter arbeiten zu können.

Das Eigenleben des auf geschlechtlichen Wege zustande gekommenen Lebewesens beginnt in dem Augenblick, in dem sich die männliche Samenzelle mit der weiblichen Eizelle vereinigt. In diesem Augenblicke setzt sich sein Körper, sein Nahrungs- und Energievorrat, aus den Stoffen und Energievorrat, den es von seinen Eltern bekam, zusammen. In diesem Anfangsmoment, $t = 0$, hat sich die Zelle auf eigene Rechnung noch nich genährt, sie ist noch nicht gewachsen, sie hat sich nicht vermehrt. Dasselbe gilt auch auf für den Augenblick, in welchem die auf vegetativem Wege sich teilenden Zellen die Teilung eben beendet haben, in welchem die neuen Zellen ihr selbständiges Leben beginnen.

Dies bedeutet in die Sprache der analytischen Mechanik übertragen, dass im Augenblicke $t=0$ die Elongation $s=0$ ist, dass also die der Gleichung (1) meiner I. Mitteilung entsprechende Kurve der aperiodisch gedämpften Schwingung durch den Anfangspunkt der Koördinaten hindurchgeht.

Setzen wir in der Gleichung

$$2s = ae^{-(r-m)t} + be^{-(r+m)t}. \tag{1}$$

der I. Mitteilung, wo

$$m = \sqrt{r^2 - w^2}, \tag{2}$$

gleichzeitig $t = 0$ und $s = 0$, so erhalten wir

$$0 = a + b, \text{ also } b = -a. \tag{3}$$

Zieht man dies in Betracht, so ergibt sich

$$2s = a\left[e^{-(r-m)t} - e^{-(r+m)t}\right]. \tag{4}$$

Um unserem Ziele näher zu kommen, müssen wir diese Gleichung differenzieren und dann statt t und $\frac{ds}{dt}$ deren Anfangswerte einsetzen. Der Differentialquotient $\frac{ds}{dt}$ bedeutet die *Geschwindigkeit* der zeitlichen Änderung von s. Den Anfangswert, den diese Geschwindigkeit im Zeitpunkte $t = 0$ annimmt, bezeichnen wir mit v_0.

Wenn wir die besagte Differentiation ausführen und dann die Anfangswerte $t = 0$ und v_0 einsetzen, so erhalten wir

$$2v_0 = a[-(r-m) + (r+m)] = 2am \tag{5}$$

also

$$a = \frac{v_0}{m}. \tag{6}$$

Ziehen wir noch (2) und (3) in Betracht, so finden

$$a = -b = \frac{v_0}{\sqrt{r^2 - w^2}}. \tag{7}$$

Durch diese Gleichung sind — wie wir beabsichtigten — a und b durch solche Grössen ausgedrückt, deren jede eine biophysikalische Bedeutung hat, nämlich durch den *Energiekoeffizienten* w, den *Dämpfungs koeffizienten* r und durch die *Anfangsgeschwindigkeit* v_0 der zeitlichen Änderung von s.

Zufolge (2) und (7) können wir nun $2s$ so ausdrücken

$$2s = \frac{v_0}{\sqrt{r^2 - w^2}} \left[e^{-(r-\sqrt{r^2-w^2})t} - e^{-(r+\sqrt{r^2-w^2})t}\right]. \tag{8}$$

Durch Integration liesse sich hieraus leicht auch für $S = \int_0^t s dt$ eine solche Gleichung gewinnen, in welcher ausser t nur noch die Konstanten w, r, v_0 vorkommen.

Es wäre leicht in (8) statt r eine andere Konstante einzuführen, nämlich den Anfangswert φ_0, den die Beschleunigung $\frac{d^2s}{dt^2}$ der zeitlichen Änderung von s im Zeitpunte $t = 0$ annimmt. Wenn wir nämlich (4) zweimal differenzieren und dann für

t und $\frac{d^2s}{d^2t}$ die Anfangswerte Null und φ_0 einsetzen, so erhalten wir

$$2\varphi_0 = a\,[(r-m)^2 - (r+m)^2] = -4arm. \qquad (9)$$

Ziehen wir noch (5) in Betracht, so finden wir

$$\frac{\varphi_0}{v_0} = -2r$$

also

$$r = -\frac{\varphi_0}{2v_0}. \qquad (10)$$

Setzen wir in (8) und in der entsprechenden Gleichung für S an die Stelle von r die rechte Seite von (10), so erhalten wir für s und S solche Gleichungen, deren Konstanten w, v_0, φ_0 sind.

Wir aber bleiben bei der Gleichung (8).

Ich muss hervorheben, dass in dieser Gleichung neben v_0 und w auch der Dämpfungsfaktor r schon vom ersten Momente der Entwicklung vorhanden ist und seine dämpfende, hemmende Rolle bis zum Lebensschluss behält. Die Dämpfung ist also kein später auftretender *seniler* oder *sekundärer* Lebensvorgang, wie dies manche Biologen behaupten, sondern sie ist (wie v_0, φ_0 und w) von den Eltern ererbt. *Die Dämpfung wurde mit dem Lebenden und dem Leben zusammen geschaffen; sie gehören organisch zusammen.*

Die Grössen w, v_0, φ_0 respektive r möchte ich die *Grundfaktoren des Lebens* nennen. Sie sind nur in erster Annäherung als Konstant zu betrachten. Sie können sich im Laufe der Entwicklung *ändern*, in Folge von erworbenen Eigenschaften des Lebewesens zunehmen, oder unter ungünstigen Verhältnissen *abnehmen*. Die als Basis dienende Anfangswerte w_0, v_0, φ_0 respektive r_0, aber bekommt das Lebewesen als Erbteil von seinen Eltern.

Die Grössen w und r kennen wir schon; v_0 aber, wenn wir nicht aus der ontogenetischen Entwicklung $2S$, sondern aus der aperiodisch gedämpften Schwingung (1), (8) ausgehen, bedeutet deren Anfangsgeschwindigkeit. Ich gehe lieber von der

Gleichung der gedämpften Schwingung aus, weil sie die Analogie zwischen Biologie und Mechanik anschaulicher darstellt.[1]

v_0 ist also *die Anfangsgeschwindigkeit*, welche die Zelle von ihren Eltern erbt, diese Eigenschaft begleitet das Lebewesen bis zu seinem Tode (8). Ihre Grösse kann verschieden sein, je nach der Grösse der Wachstums- usw. Geschwindigkeit der Eltern im Momente der Entstehung der Nachkommen.

Die kleinere oder grössere Anfangsgeschwindigkeit v_0 beeinflusst wesentlich den ganzen Lebensablauf des Lebewesens. So wie die Flugweite und der Lauf der hinausgeschossenen Kugel von ihrer Anfangsgeschwindigkeit abhängen, so hängen auch die Lebensdauer und die Entwicklung des Lebenswesens von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ab.

Auch *die Anfangsbeschleunigung* φ_0 erbt jedes Lebewesen von den Eltern, wie dies die Formel (8) zeigt. In der Formel (10) bildet φ_0 einen Faktor des Widerstandes r und spielt demzufolge eine wichtige Rolle im Ablauf des Lebens. Je grösser der absolute Wert von φ_0 ist, desto kleiner ist r, was dem lebenden Organismus zum Vorteile dient.

Die Grösse der ererbten Lebenseigenschaft a der in verschiedenen Zeiten entstandenen geschlechtlosen Nachkommen ein und desselben Individuums oder der in verschiedenen Zeiten

---

[1] Wenn wir nicht von der s Gleichung der grossen SACHS'schen Periode des Wachstums ausgehen, sondern aus der Gleichung S der ontogenetischen Entwicklung, so verschiebt sich die Bedeutung der Derivate. Wie ich vorher schon wiederholt darauf hinwies, bedeutet s die Änderung von S in der Zeit und somit hat s im Verhältnis zu S eine Geschwindigkeitdimension, während in der Gleichung der gedämpften Schwingung s eine Elongation bedeutet, also eine Längendimension. Natürlich können wir bei unseren heutigen Kenntnissen, die in der Biologie vorkommenden Grössen nicht so exakt definieren, wie die wohlbekannten mechanischen Grössen. Das hier sich ergebende Problem kann heute nicht gänzlich gelöst werden, dies wäre nur dann möglich, wenn der diesbezügliche Teil der Physik ganz bekannt wäre und die Zusammenhänge der Erscheinungen aufgedeckt wären; auf dieser Basis könnten die Dimensionen richtig bestimmt werden. Der Unterschied aber, der zwischen den zwei Ausgangspunkten besteht, beeinflusst nicht die Richtigkeit der aus ihnen abgeleiteten Gleichungen und Zusammenhänge.

auf geschlechtlichem Wege gezeugten Nachkommen desselben Männchens und Weibchens, kann verschieden sein. Dies hängt, wie dies (7) zeigt, nicht nur von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ab, sondern auch von $m = \sqrt{r^2 - w^2}$. Bei gleichem v_0 wird, je kleiner m ist, umso grösser $a = v_0/m$ sein. m aber hängt von r und w ab.

Wenn wir noch bedenken, dass dieselben w und r in unseren Gleichungen auch in *Exponenten* als Koeffizienten vorkommen, also die Grössen S, s und die Ableitungen $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$ noch mehr beeinflussen, als wenn sie blos in $a = v_0/\sqrt{r^2 - w^2}$ als Multiplikatoren vorkämen: dann können wir uns vorstellen, wie wichtig es sei, dass die Nachkommen je vorteilhaftere w und r Eigenschaften erben. Denn wir sehen jetzt schon klar, dass die ererbten Eigenschaften w, v_0, φ_0 respective r bestimmen, ob die Lebewesen die Möglichkeit einer besseren oder minder guten Entwicklung haben, ob sie lebensfähig und arbeitsfähig sind.

Diese Faktoren spielen bei der Vererbung die wichtigste Rolle und ihre genaue Erkenntnis wäre für die Vererbungs- und Abstammungslehre von höchster Bedeutung. Zur Aufdeckung der *potenzialen Eigenschaften* der im Lebewesen wirkenden Energie ist aber das Studium dieser Faktoren geradezu unerlässlich, denn so lange wir den potentialen Charakter dieser Energie nicht kennen, können wir nicht daran denken, den Zusammenhang von Ernährung, Wachstum und Fortpflanzung aufzudecken. Die noch nicht bekannte Rolle des Potentiales trübt unseren Blick bei jedem Schritt.

*

Der nächste wichtige Schritt wäre zu erkennen, wie sich w, v, φ, r, mit den biologischen Verhältnissen ändern, resp. die Funktionen $w(t)$, $v(t)$, $\varphi(t)$ resp. $r(t)$ zu kennen. Wären wir in deren Besitz, kennten wir z. B. die zeitliche Veränderung der äusseren biologischen Verhältnisse, wie Temperatur, Nahrungsqualität, Quantität und Konzentration und die derzeit noch ganz unbekannten verborgenen inneren biologischen Faktoren, so könnten wir mit Hilfe dieser Zusammenhänge die gewünschten Berechnungen bewerkstelligen.

Leider haben wir wenig Anhaltspunkte zur Erkenntnis der Funktionen $w(t)$, $v(t)$, $\varphi(t)$, resp. $r(t)$. Bei den vielzelligen, hochorganisierten Lebewesen erscheint das Bild durch Superposition der Erscheinungen so kompliziert, dass seine Lösung sehr schwer wäre. Bei den einzelligen Wesen besteht aber die Hoffnung, dass wir uns der Lösung nähern können. Diesbezüglich habe ich gut ausgearbeitete theoretische Überlegungen fertig, sogar die Versuchsanordnung habe ich im Prinzip ausgearbeitet. Nach meinem Arbeitsplane müsste ich sieben Parallelversuchsreihen ausführen; momentan bin ich aber wegen Mangel an Geld, Personal und Laboratorium nicht in der Lage auch nur eine Versuchsreihe anzustellen.

Sind die Verhältnisse bei den Einzelligen geklärt, so wird es leichter sein, die hier ermittelten Gesetzmässigkeiten auf die vielzelligen zu übertragen, als sie an diesen erst zu erforschen.

Die Aufdeckung der Gesetze, nach welchen sich je nach den biologischen Verhältnissen w, r, v_0, φ_0 ändern, ist auch darum eine so schwere Aufgabe, weil diese Zusammenhänge kompliziert werden durch die eigentümliche Veränderung *des Potentials der biomotorischen Energie,* von welchen Änderungen, ja selbst von der biomotorischen Energie und deren potentialen Eigenschaften, wir bis heute noch nichts wussten. Meine bisherigen Versuche und theoretischen Erwägungen berechtigen mich zu behaupten, dass dieser Teil der Frage bei niederen und höheren Pflanzen und vorzüglich bei einzelligen Organismen — bei den Gärungspilzen — wenigstens in grossen Zügen erklärt sei. Im Rahmen dieser Mitteilung ist kein Raum um hierauf einzugehen. Ich will aber in einer späteren Publikation zeigen, wie das Potential der Zellen sich gelegentlich der Zellteilung ändert und welche grosse Wichtigkeit diese Potentialänderung bei der Vererbung von Eigenschaften besitzt. Ausserden will ich mit verhältnismässig leicht ausführbaren Versuchsmethoden vorläufig an Einzelligen, speziell an Gärungspilzen darlegen, wie ihre biomotorische Energie im Verlaufe der Ernährung, des Wachstums und der Fortpflanzung ihr Potential ändert.

UNGARISCHE ERFOLGE WISSENSCHAFTLICHER TECHNIK.[1]

Von KORNEL v. ZELOVICH, o. M. der Ung. Akademie der Wissenschaften.

Zwischen wissenschaftlicher Technik und technischer Wissenschaft besteht die innigste Verbindung. Die Ingenieurprofessoren kultivieren und lehren auf den technischen Hochschulen technische Wissenschaften, die wissenschaftlich gebildeten Ingenieure bringen im Leben die wissenschaftliche Technik zur Anwendung.

Die staunenswerten technischen Schöpfungen der Neuzeit sind Leistungen tiefgreifender wissenschaftlich technischer Arbeit. Die Wissenschaft belebt die technische Arbeit und deren Erfolg ist ein Triumph der Wissenschaft.

Wieviel geistige Arbeit und wissenschaftliche Tätigkeit ist z. B. in einem Eisenbahn-Viadukt oder einer Eisenbahn-Lokomotive aufgespeichert; und kann der Wissenschaft ein grösserer Triumph zu Teil werden, als wenn über einem gewaltigen Viadukt in schwindelnder Höhe der Zug mit grosser Geschwindigkeit — und was in erster Linie wichtig ist — zugleich mit genügender Sicherheit dahinsaust?

Ungarn hat zur Förderung der technischen Wissenschaften und zur Anwendung der wissenschaftlichen Technik viel beigetragen und kann auf diesem Gebiete namhafte Erfolge aufweisen.

---

[1] Auszug aus einem Vortrage, gehalten am III. finn-ugrischen Kulturkongress den 12. Juni 1928.

Die Entwicklung des Unterrichts der technischen Wissenschaften in Ungarn.

Die Entwicklung des Unterrichts der wissenschaftlichen Technik steht in engem Zusammenhang mit der Erfüllung der technischen Bedürfnissen der Nationen.

Unter den Staaten Europas ist Frankreich der erste, wo die technische Wirksamkeit und Tätigkeit schon am Anfang der Neuzeit einen fruchtbaren Boden findet. Jahrhunderte hindurch hat das einheitliche Frankreich eine starke zentrale Regierung. Darin liegt der Grund, dass Frankreich im Strassenverkehr unter den europäischen Staaten als erster das Niveau des altrömischen Reiches erreichte. Zur Entwicklung des Verkehrs wurden Strassen, Brücken, später Kanäle und Hafenanlagen notwendig. Es ist daher erklärlich, dass das Bestreben zur Förderung der technischen Wissenschaften ebenfalls in Frankreich zuerst vorhanden ist. Der grosse Minister des Königs Ludwig XIV., Colbert, gründet im Jahre 1666 die französische Akademie der Wissenschaften und im Jahre 1671 die Akademie der Baukunst. So haben die französischen Ingenieure frühzeitig die Möglichkeit gehabt sich mit der wissenschaftlichen Seite ihres Fachgebietes zu beschäftigen. Um die Mitte des XVIII. Jahrhunderts, im Jahre 1747 wurde in Paris die erste Ingenieurschule der Welt, *die École des ponts et chaussées*, die Schule der Brücken und Strassen gegründet. Die Wiege der technischen Wissenschaften pflegenden Hochschulen, wie auch der Universitäten, ist Frankreich.

In Ungarn waren die Verhältnisse für die technische Tätigkeit bei weitem nicht so günstig, wie in Frankreich. Als im Abendlande im Ausbau des Strassenverkehrs die Renaissance beginnt, kämpften wir mit den Türken; wir schützten die Kultur des Abendlandes. Später machten die um die Anerkennung unserer nationalen Selbständigkeit geführten ununterbrochenen Kämpfe mit dem österreichischen Herrscherhause, den Ausbau friedlicher Verkehrsstrassen unmöglich. Trotzdem hat die ungarische Nation auch in dieser Zeit, nach wie vor, auf ihre Fortbildung grossen Wert gelegt.

Schon in der Zeit des Königs Béla III. (regierte 1173—96)

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

gingen ungarische Jungen auf die Universität nach Paris «Wir haben Kenntnis — schreibt JULIUS PAULER[1] — «von einem Jungen, Namens Bethlen, aus der Zeit Königs BÉLA III, der als studierender Clericus in Paris starb.» Von seiner Hinscheidung benachrichtigte der berühmte Philosoph und Gelehrte des kanonischen Rechtes, Abt des Klosters zu Sankt-Genoveva, STEPHAN (1177—1192) den ungarischen König, «von dem man sagt, er liebe die Gerechtigkeit und ehre die Wahrheit». Die trauernden Eltern spendeten dem Kloster zwei seidene Messgewänder, Fahne, Silber und Goldmünzen und ein weisses Pferd, das Steine tragen sollte zu den Klosterbauten, die zum grössten Teil eben zur Zeit des Abten STEPHAN's entstanden.

Dieses Dokument bestätigt, wie hoch die wissenschaftliche Bildung in Ungarn im XII. Jahrhundert eingeschätzt wurde, andernfalls wären die ungarischen Jungen nicht auf die Universität nach Paris gegangen.

Was bedeutet aber das weisse Pferd als Geschenk?

Unsere Ahnen opferten ein weisses Pferd dem Kriegsgotte, sie boten mit dem weissen Pferde ihre Seele dar. Die trauernden Eltern boten im weissen Pferd die Seele ihres Sohnes der Universität zu Paris an, weil er dort seinen Geist und Seele an Wissenschaften bereicherte.

Neben der Hochschätzung der wissenschaftlichen Bildung fehlte in Ungarn nie der Sinn für technische Schöpfungen und für wissenschaftliche Technik.

Diese Tatsache bestätigt charakteristisch das im Jahre 1617 in Venedig erschienene Werk «*Machinae Novae*» des hervorragenden Gelehrten der späten Renaissance FAUSTUS VERANCSICS, Bischof von Csanád, Vetter des ANTON VERANCSICS (1504—73) des Erzbischofs von Esztergom (Gran). In diesem Werk behandelt er etwa 50 verschiedene bemerkenswerte technische Einrichtungen, darunter die heute so aktuellen Flutmühlen. Dieses bedeutende Werk von VERANCSICS enthält auch die erste sach-

[1] A magyar nemzet története az Árpád-házi királyok alatt. (Die Geschichte des ungarischen Volkes unter der Könige der Dinastie ÁRPÁD's. Band 1. XVIII. Abschn.).

kundige Beschreibung der Seilbahnen, die auch in ihren Einzelheiten von einem staunenswerten, fachmännischen und technischen Sinn kundet.

Der jämmerliche Zustand des Verkehrs, das Fehlen guter Strassen, die unregulierten Flüsse und Sümpfe lassen im Laufe des XVIII. Jahrhunderts auch in Ungarn technische Schöpfungen, damit zugleich eine Pflege der technischen Wissenschaften und als deren Folge die Aufstellung von Ingenieurbildenden Akademien dringend erscheinen.

Es ist daher begreiflich, dass kaum zwei Jahrzehnte nach der Gründung der École des ponts et chaussées, der ungarische Hofkanzler Graf Franz Esterházy, der Königin Marie Theresia die Aufstellung eines wirtschaftlichen Kollegiums in *Szempc* (Komitat Pozsony) vorschlug und zu diesem Zwecke zugleich ein entsprechendes Gebäude anbot. So entstand im Jahre 1763 das *Collegium Oeconomicum in Szempc*, dieses in Wirklichkeit Ingenieurbildende Institut.

Im selben Jahre wird in Selmec (Schemnitz) die später so berühmte Bergschule gegründet, welche die Königin im Jahre 1770 zur Akademie erhob. Der mit Laboratorienarbeiten verbundene Unterricht der Naturwissenschaften wurde zum erstenmale in dieser Schule geübt. Diese Lehrmethode der ungarischen technischen Akademie diente den Franzosen als Muster. Als am 23. September des Jahres 1794 der französische Konvent den Vorschlag zur Aufstellung der grössten wissenschaftlichen Schöpfung der Revolution, der *École central des travaux publics* erörterte, die ein Jahr darauf den Namen *École politechnique* erhielt, sagte Fourcroy, der Chemiker, Referent der Gemeinwohl-Kommission folgendes:[1]

«Bei uns in Frankreich wurden bis jetzt Physik und Chemie nur theoretisch gelernt. Die Bergakademie in Selmec (Schemnitz) ist ein frappantes Beispiel dafür, wie nützlich es ist den Schülern jene Operationen vorzuführen, die die Grundlagen dieser Wissenschaften bilden.»

---

[1] Koloman v. Szily sen., Rektor der techn. Hochschule: Antrittsrede (1878/79).

«Es sind dort Laboratorien vorhanden, ausgestattet mit den nötigen Vorrichtungen und Materialen, damit die Schüler die Experimente wiederholen und jene Erscheinungen selbst beobachten können, die bei der Vereinigung der Körper zum Vorschein kommen.»

«Die Kommission des Gemeinwohles ist der Ansicht, dass in der *École des travaux publics* diese Methode anzuwenden wäre. Dieses Lehrsystem hat nämlich einen zweifachen Vorteil: einerseits fesselt es alle Sinne an den Unterricht, anderseits lenkt sie gleichzeitig die Aufmerksamkeit der Hörerschaft auf unzählige solche Umstände, die während des Vortrages meist unbeachtet bleiben. Die Zuhörerschaft wird in separaten Sälen eingeteilt, wo sie die im gemeinsamen Hörsaale vorgetragenen Konstruktionen aus Darstellender-Geometrie durcharbeitet und wiederholt, ebenso wie die wichtigen Experimente der Chemie in den Laboratorien, so dass sich die Studierenden daran gewöhnen, die zweckmässigsten Verfahren und vollständigsten Herstellungsarten selbst aufzufinden.»[1]

Am Ende des XVIII. Jahrhunderts nahm demnach die grosse französische Nation von Ungarn das Muster bei der Einrichtung ihrer berühmten Hochschule.

Das Collegium Oeconomicum in Szempc hat unter der Leitung der Piaristen 13 Jahre lang bestanden; im Jahre 1776 ist es abgebrannt.

Einige Jahre darauf geht die Ausbildung der Ingenieure in Ungarn mit einem grossen Schritt vorwärts: am 1. November 1782 wird an der kgl. ung. Universität in Buda ein Ingenieur-Institut, das *Institutum Geometricum* eröffnet.

Demnach erfolgt in Ungarn die Ausbildung der Ingenieure seit 1782 an einer Hochschule. Diesbezüglich gingen wir also der ganzen Welt voraus und kamen auch den Franzosen mit 12 Jahren vor, die eine hochschulmässige Ausbildung der Ingenieure erst mit den im Jahre 1794 gegründeten *École-polytechnique* ermöglichten.

---

[1] Gazette Nationale, ou le Moniteur universel, No. 8. Octidi Vendemiaire, l'an 3 de la Rep. fran.

Die hochschulmässige Ingenieurbildung kann somit in Ungarn auf eine fast 150-jährige Vergangenheit zurückblicken.

Das Institutum Geometricum hat bis 1850, also fast 70 Jahre lang bestanden und zeitigte alsbald jene Resultate, die das Land von ihm erwartete.

Infolge der sorgfältigsten und strengen Ausbildung der ersten Jahrzehnte, verfügte Ungarn am Ende des XVIII. und insbesondere Anfang des XIX. Jahrhunderts über ein hervorragendes Ingenieurkorps. Viele Ingenieure legten auch in der wissenschaftlichen Literatur einen regen Eifer an den Tag. Die ersten Ingenieurmitglieder der ungarischen Akademie der Wissenschaften gingen aus der Reihe der Schüler des Institutum Geometricums hervor.

Die Gründung des Institutum Geometricum und dessen Anschluss an die Universität wäre zweifellos eine erspiessliche Verfügung gewesen, wenn dieses Institut mit der Zeit auch Schritt hielte. Auf den Fortschritt der ersten Jahrzehnte folgte aber leider ein Rückfall.

Auch in Ungarn erwies sich die Richtigkeit des Satzes, den die Franzosen am frühesten erkannten, dass die technische Wissenschaften in den mit Traditionen behafteten Universitäten nicht aufblühen können. Ja selbst die Gleichberechtigkeit der Naturwissenschaften mit den ältern Wissenschaften wurde seitens der Universität nur nach Bekämpfung eines gewissen Widerstandes anerkannt. Noch grösser war die Abneigung gegenüber den angewandten Naturwissenschaften, gegenüber den technischen Wissenschaften. Diese waren nämlich einerseits, weil sie nebenbei auch im Dienste materiellen Interessen standen, unter dem Einfluss der antiken Philosophie gering geschätzt, anderseits war die Entwicklung auch darum unmöglich, weil sie — in der Atmosphäre der Universitäten vom praktischen Leben ganz getrennt — in einer an gelehrsame Formen festhaltender Weise behandelt wurden.

Erschwert wurde unsere Lage noch durch die Verbindung mit Österreich, das ungern sah, wenn bei uns ein Kulturinstitut aufblühte. So kam es, dass in den vierziger Jahren des XIX. Jahrhunderts die Lehrmittelsammlung für Physik auf der Pester

Universität 64 Gulden jährliche Dotation bekam, wo hingegen zu gleicher Zeit auf der Wiener Universität die Dotation 1100 Gulden war.

Unter solchen Umständen war die Zukunft und die Entwicklungsmöglichkeit des Institutum Geometricum aussichtslos. Das Fehlen der nötigen Lehrstühle und der Ausrüstung konnte selbst durch den anerkennenswerten Eifer der Professoren nicht ersetzt werden.

Unter den hervorragenden Professoren des Institutum Geometricum finden wir Johann Horváth (1782—1792), dessen Lehrbücher der Physik, Mathematik und Mechanik auch in den italienischen Universitäten und Hochschulen benützt wurden.

Auf allen Gebieten der Mechanik war Josef Nemetz, Professor der mechanischen Technologie (1788—1791) ein grosser Erfinder. Von ihm stammt die Drehorgel, der ewige Kalender, die nach innen und aussen selbständig sich öffnende geräuschlose Tür. Zahlreiche Erfindungen dankt ihm die landwirtschaftliche Maschinenindustrie, so unter andern die Konstruktion einer Mähmaschine und einer Dreschmaschine. Auch in der Waffentechnik schuf er bleibendes, er vereinfachte das Ausbohren der Kanonen und konstruierte einen Hinterlader.

Georg Fejér schreibt von Ludwig Mitterpacher (1782—1804), dem berühmten Professor der Landwirtschaft und landwirtschaftlichen Technologie: «seine Verdienste sind im Ausland bekannt, in Ungarn unsterblich».

Anfang des XIX. Jahrhunderts wurde die Physik und Mechanik von Ádám Tomcsányi (1801—1831) vorgetragen, der seinen Namen durch das im Verein mit seinem Kollegen, dem Arzt-Professoren Kitaibel über das Erdbeben in Mór geschriebenes Werk verewigte.

In der zweiten Hälfte des XIX. Jahrhunderts schrieb Otto Petzval (1837—1850), Ingenieur-Professor des Institutes, über die Lokomotiven, und auch eine landwirtschaftliche Maschinenlehre; der berühmte Professor der Physik und Mechanik Ányos Jedlik, Pionier der Elektrotechnik, hielt Vorträge aus der Elektrizitätslehre.

Der oben erwähnte Rückfall des Institutum Geometricum liess

es zweifellos erkennen, dass die Pflege der technischen Wissenschaften und die Ausbildung der Ingenieure auch in Ungarn eine, von der Universität getrennte technische Hochschule zu errichten sei.

Wie natürlich auch dieser Wunsch war, konnte dessen Erfüllung in Ungarn wegen des unspriesslichen Einflusses Österreichs nicht glatt erfolgen. Umsonst erklärt sich das Parlament im Jahre 1836 für diese Idee, König FERDINAND V. verordnet erst nach langen Streitigkeiten und wegen des österreichischen Widerstandes nach acht Jahren (1844), dass in der Stadt Pest, bis die zu errichtende technische Hochschule erbaut wird, eine Gewerbeschule erbaut werde.

Diese Schule wurde im Jahre 1846 eröffnet und hatte, um die Verdienste des Palatins JOSEF's zu verewigen, den Namen Josef-Gewerbeschule bekommen.

Das zu dieser Zeit schon vegetierende Institutum Geometricum wurde nach vier Jahren, im Jahre 1850 der Josef-Gewerbeschule angeschlossen. Laut bezüglicher königlicher Verordnung soll die Gewerbeschule zum Polytechnikum erhoben werden; indes geschah dies erst im Jahre 1857.

Von wohltätigen Einfluss war auf die Entwicklung unserer einzigen technischen Hochschule die Wiederherstellung der Verfassung im Jahre 1867. Mit wohlwollender Unterstützung der verfassungsmässigen Regierung und durch das vorzügliche Wirken der hervorragenden Professoren erreichte die Hochschule nach wenigen Jahren das Niveau der zu jener Zeit hervorragendsten ausländischen Hochschulen.

Ein wichtiger Merkstein in der Entwicklung der technischen Hochschule ist das Jahr 1871—72. In diesem Jahr beginnt nämlich die königliche technische Hochschule auf *autonomer Grundlage* jenen Lebenslauf, welcher ihr Anerkennung brachte so in Ungarn wie auch auf der ganzen Welt. Eine weitere, ein Jahrzehntelang währende ausharrende Arbeit liess schliesslich der Hochschule eine ständige Unterkunft zu finden.

Im laufenden Jahrhundert bildet hinsichtlich der Entwicklung der kgl. technischen Hochschule ein bedeutendes Ereignis die Errichtung der wirtschaftlichen Abteilung. Auch in dieser

Beziehung ging Ungarn dem Auslande voraus. Die Möglichkeit einer ausgedehnten wirtschaftlichen Ausbildung besteht an der kgl. Technischen Hochschule seit dem Jahre 1914. Laut den, mit königlicher Resolution bekräftigten Satzungen ist die kgl. Technische Hochschule die Universität der technischen und wirtschaftlichen Wissenschaften. Der Zweck der Hochschule ist die wissenschaftliche Ausbildung von technischen und wissenschaftlichen Fachmännern durch systematischen Unterricht.

Heute ist man schon in Deutschland der Ansicht, dass zur eingehender Pflege der wirtschaftlichen Wissenschaften die technischen Hochschulen unter anderen Hochschulen geradezu prädestiniert sind. Nach dem Weltkrieg werden nacheinander die Münchener, die Dresdener und die Charlottenburger technischen Hochschulen zu technischen und wirtschaftlichen Hochschulen eingerichtet.

Die kgl. Technische Hochschule gliedert sich in sechs Fakultäten, und zwar in die Abteilungen für Architekten, Bauingenieure, Maschineningenieure, Ingenieur-Chemiker, ferner eine Wirtschaftswissenschaftliche und eine allgemeine Abteilung. Die letztgenannte bietet Gelegenheit zu höheren Studien einerseits für Lehramtskandidaten, anderseits für Studierende einzelner besonderen Wissenschaftzweigen. Auf der wirtschaftswissenschaftlichen Abteilung können nur Hochschul-Absolventen inskribieren.

Die Hochschule hat stets Wert gelegt auf das Zusammenarbeiten der Fakultäten, favorisierte nicht die spezielle Ausbildung gegenüber einer vielseitigen, legte Gewicht auf allgemeinbildende Vorträge und gab die Möglichkeit einer vielumfassenden Ausbildung in den wirtschaftlichen Wissenschaften zur rechter Zeit. Infolgedessen blieb sie von den Übelständen, die am Anfang dieses Jahrhunderts in den deutschen technischen Hochschulen auftraten, verschont.

Heute, auf der Höhe der Entwicklung, welche die technische Hochschule in Folge ihrer gutangelegten Organisation erreichte, müssen wir mit Dankbarkeit der hervorragenden Professoren gedenken, die in engen Sälen, mit geringen Mitteln und vielen Entbehrungen das technische Wissen verkündeten. Und unter allen diesen Hervorragenden müssen wir vier der Hervorragend-

sten besonders hervorheben: Josef Stoczek, Koloman v. Szily sen., Alexander v. Liptay und Vinzenz Wartha, alle Verwahrer der Ideale des grössten Ungars, des Grafen Stephan Széchenyi.

Das Wissen und Können des an der kgl. ung. Technischen Hochschule erzogenen Technikers wetteifert siegreich mit denen der in gallischen Sinn erzogenen Ingenieure. Die Gründlichkeit unserer Ingenieure kommt der der Deutschen gleich und ihr Sinn für das Praktische wetteifert mit den Amerikanern.

Zu den Schöpfungen der transsibirischen, mandschureischen, südafrikanischen und niederländisch-indischen Eisenbahnen hat das Geisteskapital der an der ungarischen technischen Hochschule ausgebildeten Ingenieuren viel beigetragen.

In den grossen amerikanischen industriellen Unternehmungen ist der ungarische Techniker keine Seltenheit.

Die Schaffungskraft der ungarischen Ingenieure hat auf dem Gebiet der Erfindungen in der Elektrotecknik und in der Eroberung der Lüfte zu nahmhaften Erfolge geführt.

Die wissenschaftliche Technik strahlt ihre kulturfördernde Wirkung nach jeder Richtung aus, die technischen Hochschulen sind also offenbar jene Pole, von welchen die wertvollsten Strahlen nach allen Richtungen hinausgehen. In Ungarn ist ein solcher Pol die kgl. ung. Technische Hochschule. Die Eisenbahnstrassen nach der uralten Krönungsstadt Pozsony (Pressburg), nach Kassa, der Stadt Rákóczi's, nach der gewerbetreibenden Szepesség (Zipserland), nach Kolozsvár (Klausenburg), nach dem Kohlenbecken des Zsil-Tales, nach dem Székelyföld (Seklerland), durch die Porta Orientalis zur unteren Donau hin, durch das Karstgebirge nach Fiume, die Schiffbarkeit der Donau, Theiss, Drau und Save sind von hier ausgestrahlte ungarische Kulturarbeiten.

*

Schöpfungen ungarischer Techniker.

Wir wollen nun die, mit Hilfe der wissenschaftlichen Technik geschaffenen unvergänglichen Werke des ungarischen Genius ansehen. Diese von hoher Stufe ungarischer Kultur zeugende

Werke ungarischen Ingeniums fallen zum grössten Teil auf die abgetrennten Gebiete.

Wenn irgendwo, so beweisen die an der unteren Donau (am Eisernen Tor) errichteten unvergänglichen technischen Werke die Schaffungen des ungarischen Genius.

Durch die Schiffbarmachung der unteren Donau war ein Traum von Jahrhunderten verwirklicht worden. Was die Römer nicht vollbringen konnten — obgleich sie es versuchten — vollbrachten die Ungarn. Graf Stephan Széchenyi, dessen technische Kenntnisse die Grenzen des Dilletantismus weit überragten, verfügte nicht über Massen von römischen Legionen, doch seine Energie, vereinigt mit dem hervorragenden technischen wissenschaftlichen Wissen seines treuen Mitarbeiters Paul v. Vásárhelyi's, siegte über die bis dahin als unüberwindbar geltenden Hindernisse. Und wenn man zu ihrer Zeit die endgültige Regulierung auch nicht vollenden konnte, so war die Schiffbarkeit der unteren Donau nach Überwindung unglaublicher Schwierigkeiten dennoch erreicht. Der ungarische Kulturgeist kämpfte hier erfolgreich mit den Hindernissen der Natur und jeder unbefangene Urteiler muss gestehen, dass unter ähnlich schwierigen Verhältnissen ähnliche Resultate mit so geringem Kostenaufwand noch nie und nirgends erzielt wurde.

Auf der linken Uferseite der unteren Donau, gegenüber der von Trajanus errichteten, verhältnismässig erbärmlichen Schleppstrasse, führt eine der schönsten Chaussé-n Europas: *die Széchenyi-Strasse* entlang. Das Andenken des grössten Ungars verewigt die oberhalb der Strasse in die Felsenwand eingeschnittene Széchenyi-Gedenktafel.

Am Ende des vorigen Jahrhunderts wurde die endgültige Regulierung des unteren Donaustromes und der Bau des «Eisernen Tor»-Kanals unter der Leitung von Ernst Walland's, nach Plänen hervorragender ungarischen Ingenieure durchgeführt. Eine so grosszügige und in vielen Beziehungen ganz eigenartige, ausserordentlich schwierige Arbeit war vorher weder in Europa, noch auf anderen Ort der Welt ausgeführt worden. Ungarisches technisches Wissen und Energie siegten jedoch auch hier. Ungarisches Wissen, ungarischer Wille, ungarisches Herz und un-

garischer Arm haben diese Schiffstrasse in die Felsen geschlagen zur bleibenden Erinnerung.

Eine würdige Vollendung des unvergänglichen ungarischen Schaffens an der unteren Donau wäre der Ausbau der Wasserkraftanlage im Eisernen Tor gewesen, dessen Pläne der früh verschiedene hervorragende Professor unserer Hochschule, Donát Bánki im Jahre 1917 ausgearbeitet hat. Diese Wasserkraftanlage wäre imstande gewesen Budapest und einen ganzen Landesteil mit elektrischem Strom zu versehen und hätte die Hauptenergiequelle der zu elektrifizierenden Staatseisenbahnen sein können.

Unser nationales Selbstgefühl wächst, wenn wir an den genialen Entwerfer der unteren Donaustrasse und der Theiss-Regulierung, den hervorragenden Ingenieur, Absolventen des Institutum Geometricum: Paul v. Vásárhelyi denken.

Er hat zum Zwecke der Anfertigung einer verlässlichen Schiffahrtskarte die Vermessung der gefährdeten Kaskaden der unteren Donau so gründlich und sachmässig durchgeführt, dass diese eine stets wertvolle Arbeit der Hydrotechnik bleiben wird. Seine Karte von der unteren Donau kann als die erste Flusskarte der Welt bezeichnet werden. Von bleibendem Wert sind auch seine im Interesse der Regulierung der unteren Donau entfalteten Arbeiten. Er war es ebenfalls, der auf Aufforderung Széchenyi's, die berühmte Széchenyi-Strasse entlang der unteren Donau gebaut hat.

Nach Vollendung dieser mächtigen Arbeit wartet auf ihm eine auf Jahrzehnte bestimmte grosse Arbeit, die Herstellung der Pläne zur Theiss-Regulierung. Seine Aufnahmen von der Theiss sind gleichfalls wirkliche Schätze, die das Staunen der ausländischen Fachleute mit Recht erweckten; ähnlich gründliche und so umfangreiche Aufnahmen gab es damals nirgends. Eine Flussregulierung, wie die der Theiss, steht aber auch einzig da in der Welt. Vásárhelyi ist der Entwerfer des Planes der epochalen Theiss-Regulierung. Im Tale der Theiss beträgt das vom Wasser geschützte Gebiet mehr als zweieinhalb Millionen Hektaren. Dieses Resultat steht in Europa einzig da. Für Rumpf-Ungarn war es eine Lebensrettung. Die Existenzmöglichkeit der

Bevölkerung des Theiss-Tales wäre ohne dieses Wasserschutzes kaum zu sichern gewesen.

Mit ausgezeichnetem Erfolg forschte Vásárhelyi auch die Gesetze der Wasserbewegung. Das Problem ist beiweitem nicht so einfach. Mit Recht sagte seinerzeit Galilei: «Ich habe weniger Schwierigkeiten in der Entdeckung der Bewegung der Himmelskörper gefunden, ungeachtet ihrer erstaunlichen Entfernung, als in den Untersuchungen über die Bewegung des fliessenden Wassers, welche doch unter unseren Augen vorgeht.»[1] Mit der Feststellung der Gesetze der Bewegung des fliessenden Wassers war Vásárhelyi seinem Zeitalter vorgegangen. Berühmte ausländische Ingenieure gelangten bedeutend später zur ähnlichen Feststellung dieser Gesetze.

Unter der Leitung Humphrey's und Abbot studierte in den Jahren 1851 bis 1858 eine ganze Ingenieursgruppe der Nordamerikanischen Union den Fluss Mississipi, um das Gesetz der Bewegung des fliessenden Wassers festzustellen. Auf Aufforderung des Präsidenten Lincolns hat man die, das Resultat der Forschungen enthaltende Abhandlung in mehreren Exemplaren nach Europa gesandt; die Amerikaner haben ihre Arbeit der Aufmerksamkeit von Gelehrten empfohlen und baten um deren Meinung. In erster Linie hätte damals Ungarn die Gesetze von Humphrey's und Abbot beurteilen können, wenn sich die Amerikaner auch an uns gewandt hätten, denn zu jener Zeit waren die vorzüglichen Aufnahmen Vásárhelyi's von der Theiss und der Donau, schon vorhanden. Bemerkenswert ist es, dass die zwei amerikanischen Kapazitäten hinsichtlich der Bewegung des fliessenden Wassers fast dieselbe Gesetzmässigkeit fanden, wie Vásárhelyi zwei Jahrzehnte früher. Dieser war aber vom Staat nicht unterstützt, war mit amtlichen Arbeiten überhäuft und beschäftigte sich mit diesen Problemen bloss aus Liebe für die Wissenschaft.

Der ungarische Genius schuf auch auf anderen Gebieten der wissenschaftlichen Technik bleibendes.

Werner Siemens, der geniale deutsche Ingenieur hat am Anfang des Jahres 1867 seine Studie der wissenschaftlichen

---

[1] Rühlmann: Hydromechanik. 1880. S. 338.

Akademie zu Berlin vorgelegt, welches das Prinzip der Dynamomaschine enthielt. Diese in der Entwicklung der Elektrotechnik epochale Arbeit knüpft sich wirklich an seinen Namen, obgleich das Konstruktionsprinzip der Dynamomaschine wenigstens sechs Jahre früher von Ányos Jedlik, Professor der Pester Universität und des inzwischen aufgelassenen Institutum Geometricum' erfunden wurde. Diese Erfindung blieb aber leider in seinem Arbeitszimmer verborgen. In der physikalischen Sammlung der Budapester Universität ist die erste Dynamomaschine vorhanden, welche Ányos Jedlik in der Werkstätte des Pester Mechanikers Nuss anfertigen liess. Nach Angabe des urkundlichen Inventars der Sammlung stammt diese Maschine vom Jahre 1861.

Der mit der Fähigkeit zu mechanischen Erfindungen begabte Jedlik konstruierte im Jahre 1828 auch den ersten elektromagnetischen Motor. In der neueren deutschen Literatur wird diese seine Erfindung — seinen Namen entstellend — dem Professor Jedlicska zugeschrieben.

Nach solcher Vorgeschichte ist es kein Wunder, wenn in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts die Elektrotechnik auf ihren welterobernden Weg von unserem Vaterland ausgeht.

Die gelehrten ungarischen Techniker: Bláthy, Déri und Zipernovszky, die hervorragenden Ingenieure der Ganz'schen Fabrik, haben ihre weltberühmte Erfindung, den ersten Transformator für Wechselstrom auf der Budapester Landesaustellung im Jahre 1885 vorgeführt, mit welchem sie die Übertragung des elektrischen Stromes mit geringen Verlust auf grosse Entfernungen und dessen wirtschaftliche Verteilung auf grossen Gebieten ermöglichten. Die moderne Elektrifizierung, die elektrische Beleuchtung, die Übertragung der Energie war auf diese Weise möglich.

Die erste grosse städtische Zentrale, welche nach diesem System errichtet wurde, war in Rom im Jahre 1892 erbaute und hier kam auch die erste grosse Kraftübertragung (Tivoli-Rom) zustande.

Auf dem Gebiete der elektrischen Zugförderung der Hauptbahnen sichert sich Koloman v. Kandó den grössten Teil des

Ruhmes der Pioniere; er hat den hochgespannten Drehstrom zur Elektrifizierung der Hauptbahnen brauchbar gemacht. In der nach seinem System gebauten Valtellina-Eisenbahn in Italien hat er die Wirtschaftlichkeit dieses Systems glänzend bewiesen. Jetzt konstruiert er seine mächtigen Maschinen in der Heimat.

Auf eisenbahntechnischen Gebiet ist der ungarische Ingenieur auf der ganzen Welt anerkannt. Im grossen Masse hat zu dieser Anerkennung der Verein Deutscher Eisenbahnverwaltungen beigetragen. Die Eisenbahnen Mitteleuropas haben sich im Verein Deutschen Eisenbahnverwaltungen vereinigt, um die äusserst wünschenswerte Gleichförmigkeit im Eisenbahnwesen dadurch zu sichern. Der Präsident des technischen Ausschusses des Vereins, war viele Jahre hindurch der Präsident der ungarischen Staats-Eisenbahnen Ludwig v. Tolnay. Der hochgelehrte Ingenieur hat diese Ehrenstelle mit imponierendem Wissen und grosser Umsicht bekleidet. Der Verein Deutscher Eisenbahnverwaltungen hat seine hervorragend erfolgreiche Tätigkeit honoriert, indem er den Präsidentenstuhl des technischen Ausschusses den ungarischen Eisenbahnen anvertraut.

Weltberühmtes haben wir auch in den Brückenbau geleistet. Unter den grandiosen Donau-Brücken unserer Hauptstadt waren die Széchenyi-Kettenbrücke noch nach dem Plan eines englischen, die Margareten-Brücke nach dem eines französischen Ingenieurs erbaut. Ungarische Bauten sind aber die Franz Josef-Brücke und die Elisabeth-Brücke. Die letztere ist auf unserem Kontinent die Brücke von grösster Spannweite und eine der Kettenbrücken von grösster Spannweite der Welt.

Die bis dahin errichteten Kettenbrücken waren mit dem gemeinsamen Fehler behaftet, dass sie nicht genügend steif waren und so die Kettenträger grössere Schwingungen vollführten. Anton Kherndl, weiland Professor unserer Hochschule, hat die Theorie der versteiften Kettenträger ausgearbeitet und diese Theorie diente als Grundlage dem Entwurf der Elisabeth-Brücke. Diese mächtige Brücke wurde also aus einheimischen Baustoffen, mit einheimischen Maschinen, eigenen Arbeitskräften und nach einheimischer Theorie errichtet.

Im Interesse der Entwicklung der ungarischen Industrie

wurde die wissenschaftliche Technik natürlich in erster Linie auf solche Probleme gelenkt, die unserem Vaterland zum Nutzen gereichten. Nicht nur auf die Entwicklung der Hauptstadt Budapest, sondern auf die der Wirtschaftsverhältnisse des ganzen Landes war die Aufstellung der Pester Ersten Dampfmühle — der Josef Walzmühle, einer berühmten Schöpfung Széchenyi's — von ausserordentlich grosser Bedeutung. Diese Mühle war der Anfang der später so hohe Stufe der Vollkommenheit erreichten weltberühmten ungarischen Mühlen-Industrie. Auf diesem Gebiet gingen alle Neuerungen und Verbesserungen von hier aus. Die ungarischen Mühlen liessen dem ungarischen Mehl einen Weltruf erlangen, das Ausland kam zu uns in die Schule, um die richtige Art und Weise des Mahlens zu lernen; der ungarische Müller war der beste auf der ganzen Welt, bis «Trianon» diese blühende ungarische Industrie vernichtete.

In der Entwicklung der ungarischen Industrie hat Andreas Mechwart unsterbliche Verdienste. Unter seiner Leitung entwickelte sich die Ganz'sche Maschinenfabrik zur grössten industriellen Anlage Ungarns und wurde unter Mitwirkung ihrer hervorragenden Ingenieure weltberühmt. Mechwart kam aus der Fremde zu uns, wurde aber durch und durch ein Ungar, der sich mit grosser Hingabe den ungarischen technischen Problemen annahm. Als im Jahre 1873 die grosse Finanzkrisis, der «Wiener Krach», die unter seiner Leitung stehende Fabrik mit der Vernichtung drohte, überraschte er die Welt mit seinem berühmten Walzenstuhl, mit dem er den Grundstein der technischen Vollkommenheit unserer Mühlenindustrie legte. Der Mechwart'sche Walzenstuhl verbreitet sich in allen fünf Weltteilen und so blühte natürlich auch die Fabrik wieder auf.

Der Beweis seiner Anhängigkeit zur neuen Heimat ist sein Rotationspflug, mit dem er in dem auf die Landwirtschaft angewiesenen Ungarn die Mehrproduktion zu fördern wünschte.

Aus dem Gebiet der Motortechnik können wir ebenfalls von einem weltberühmten Erfolg berichten. Donát Bánki, der Entwerfer der Wasserkraftanlage am Eisernen Tor, konstruierte den ersten Karburator. Die Millionen der Automobilen und

Flugzeugen der Welt sind alle mit einem nach dem Prinzip des Bánki-Karburators konstruierten Karburator versehen.

Im Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaften und der Technik, im einzig dastehendem Münchener «Deutsches Museum» zeugt der erste von Bánki im Jahre 1894 konstruierte Hochdruck-Benzin-Motor samt Karburator, der «Bánki-Motor», wie auch seine weltbekannte Wasserturbine, von der mächtigen Schaffenskraft des ungarischen Genius.

*

Von den Werken der ungarischen wissenschaftlichen Technik haben wir nur die hervorragendsten erwähnt, nur Leistungen von Weltruf.

EXPERIMENTAL-ÖKOLOGISCHE STUDIEN AM BALATON (PLATTENSEE).

1. Transpirationsmessungen in verschiedenen Pflanzengesellschaften.*

Von: R. v. SOÓ (Tihany am Balaton).

In dem ersten Jahre des Bestehens des Ungarischen Biologischen Instituts habe ich — neben systematisch-ökologischen Studien über die phanerogame Wasservegetation Ungarns (s. Archivum Balatonicum II. 1. Abt. p. 45—79) — die pflanzensoziologische-synökologische Bearbeitung des Balatongebiets begonnen. Ausser den Aufnahmen und der Beschreibung der Pflanzenassoziationen — von denen ich bisher ungefähr 60 Assoziationen unterscheiden und analysieren konnte — (s. Archivum Balatonicum l. c. 132—134; über die Methodik usw. s. meine Geobotanische Monographie von Kolozsvár I. 1927 5—9, und Zur Nomenklatur der Methodologie der Pflanzensoziologie 1927, Berlin), untersuchte ich die Bodenverhältnisse (bes. Kalkgehalt und Wasserstoffionenkonzentration) und die Wirkungen der Klimafaktoren.

Die Transpirationsmessungen wurden mit den PICHE-schen Evaporimeter in den Monaten Juni—September (einmal jeden Monat) durchgeführt. Untersuchungsgebiete: Westseite der Halbinsel von Tihany, der «Csúcshegy» (235 m) und dessen Umgebung. Untersuchte Pflanzengesellschaften:

Wälder: *Pinus nigra* Forst,
Mischwald mit gepflanzter *Robinia* und *Pinus*,
Mischwald *(Ulmus campestris-Fraxinus ornus* Ass. mit *Acer campestre* und *Quercus sessilis-lanuginosa)*,
derselbe, als anthropogen gestörter Buschwald.

* Vorgelegt der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 18. Feber 1929.

Gebüsche: *Cratageus monogyna-Prunus spinosa* Weidengebüsch,
Cotinus coggygria-Quercus lanuginosa Ass.
Wiesen: *Agrostis alba-Carex distans* Ass.
Weiden: *(Festuca)-Cynodon-Lolium* Weide mit *Verbascum speciosum.*
Steppenwiesen: *Festuca sulcata-Stipa joannis* Ass.
Felsen: *Grimmia-Sedum* Ass.
Sümpfe: *Carex riparia* Ass.
Schoenoplectus lacustris Ass.
Phragmites vulgaris Ass.
Kulturen: *Lavandula spica* Kultur.

Zum Vergleich: frei in der Luft über Felsen und am Gipfel.

Eingehende Betrachtung der Ergebnisse der Messungen eines Tages. Beispiel: 28/VIII.

Allg. Klimacharakter: Wolkenloser, nachmittags windiger, sehr heisser Tag. Verlauf der Temperatur und der Luftfeuchtigkeit:

h:	8	10	12	14	16	18	20	
T:	24	25	28	30,5	30	27	22,5	Max.: 31,7 C.
H:	65	75	72	74	72	72	70 %	

Sonne bis 18^h 10—15′. Windgeschwindigkeit (gemessen am E. No. 10): vm. 10^h: 1,6 m pro sec, nm. 17^h: 30′ 3 m pro sec.

Aufstellung der Evaporimeter: (Summa: der verbrauchten Wassermenge v. 10^h—16,30^h)

Assoziation	Natur der Stelle	Exposition, Relative Höhe: cca		Höhe ü. d. Boden	Summa in cm³
1. Mischwald: *Robinia*	am Fusse einer *Robinie*, im Schatten, nm. in der Sonne	(SW)	3 m	5 cm	2,05
2. *Schoenoplectus lacustris* Ass.	in der Sonne, nm. Wellenschlag (Wasserstand 3 cm)	(SW)	0 «	7 «	2,30
3. *Carex riparia* Ass.	in der Sonne, auf einer Bulte	(SW)	1 «	12 «	1,95
4. *Phragmites* Ass.	am Fusse des Schilfes, im Schatten	(SW)	0 «	3 «	1,75
5. *Phragmites* Ass.	in der Sonne, in der Höhe der oberen Blätter, dem Winde ausgesetzt	(SW)	0 «	210 «	4,30

No	Assoziation	Natur der Stelle	Exposition	Relative Höhe: cca	Höhe ü. d. Boden	Summa in cm²
6.	Mischwald: *Pinus nigra*	im Schatten, in der Höhe der Blätter von *Crataegus monogyna*.	(SW)	3 m	130 cm	(2,35)
7.	*Prunus - Crataegus* Ass.	in der Sonne, in der Höhe der Blätter einer Verbissform von *Prunus spinosa*	(SW)	3 «	45 «	5,50
8.	*Andropogon Ischaemum* Asp.	in der Sonne, Standort von *Verbascum speciosum* in der Höhe der Blätter	NW-W	10 «	10 «	8,45
9.	Buschwald: *Fraxinus*	im Schatten, in der Höhe der Blätter der Sträucher (*Crataegus* etc.)	NW-W	10 «	150 «	4,60
10.	Kultur von *Lavandula spica*	in der Sonne	SO—O	25 «	5 «	7,40
11.	Frei hängend über	felsigen Abhang in der Sonne, windexponiert, labil	S—SW	25 «	5 «	9,40
12.	Mischwald: *Fraxinus*	im Schatten, am Waldrand, *Glechoma hirsutum* Standort (am Grat)	. . . .	100 «	30 «	4,75
13.	*Grimmia-Sedum* Ass.	in der Sonne, windexponierter Felsstandort	S	120 «	7 «	10,60
14.	Frei hängend am Gipfel des Csúcshegy	in der Sonne, windexponiert, labil	. . . .	125 «	200 «	8,90
15.	*Festuca sulcata-Stipa joannis* Ass.	in der Sonne	W	105 «	5 «	8,95
16.	Dieselbe	in der Sonne, am Grat	. . . .	110 «	5 «	8,60
17.	Dieselbe	in der Sonne	O	105 «	5 «	6,45
18.	*Cotinus coggygria* Ass.	in der Sonne, in der Höhe der *Cotinus*-blätter	W	105 «	120 «	7,90
19.	Mischwald: *Ulmus-Acer-Quercus*	im Schatten, *Hedera helix* Standort, mitten des Bestandes	O—NO	85 «	10 «	2,85
20.	*Pinus nigra* Forst	im Schatten (Halbschatten) mitten	O—NO	80 «	40 «	(3,95)

Anm. Dei dieser Gelegenheit wurde die Transpiration in der Ass. von *Agrostis alba-Carex distans* nicht gemessen, darum gebe ich hier die Werte der transpirierten Wassermengen des Versuches am 11/VII. 1928.: (9^h—18^h 30′)

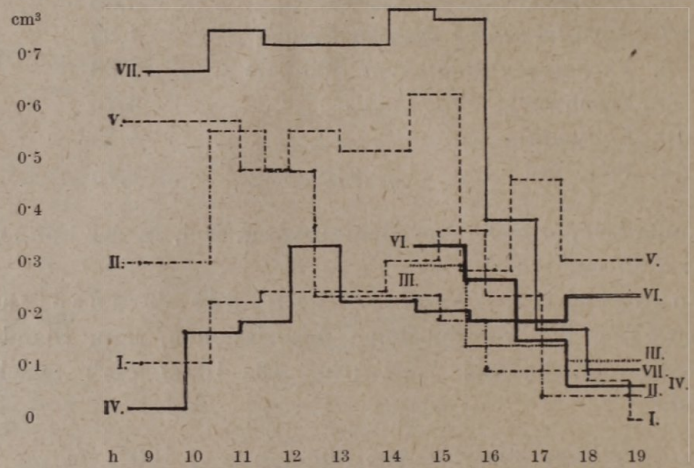
1.	Mischwald: *Robinia*	3,85
2.	*Carex riparia* Ass.	1,35
3.	*Phragmites* Ass. unten	1,05
4.	*Phragmites* Ass. oben	1,35
5.	Mischwald: *Pinus*	2,85
6.	*Prunus-Crataegus* Ass.	3,85
7.	*Agrostis-Carex distans* Ass.	1,85
8.	*Verbascum speciosum* Standort	5,60
9.	Buschwald: *Fraxinus*	4,75
10.	*Lavandula* Kultur	4,45
11.	Fels, frei	9,75

Standardevaporimeter vor dem Institut, frei, in der Sonne. Summa: 7,35 cm^3

Prozentuelle Vergleichung der Transpirationsgrösse der verschiedenen Assoziationen, resp. Standorte, wenn der höchste Wert (No. 13: 10,60 cm^3) gleich 100% ist.

1.	*Sedum-Grimmia* Ass. (Fels)	100 %
2.	Frei über Fels	89,5 «
3.	*Festuca sulcata* Ass. W—Exp.	84,2 «
4.	Frei (Gipfel: 2 m)	83,7 «
5.	*Festuca sulcata* Ass. Grat	80,8 «
6.	*Verbascum speciosum* Standort	79,4 «
7.	*Cotinus* Ass.	74,3 «
8.	*Lavandula* Kultur	69,6 «
9.	*Festuca sulcata* Ass. O-Exp.	60,6 «
10.	*Prunus-Crataegus* Ass.	51,7 «
11.	Mischwald: *Fraxinus* oben	44,65 «
12.	Buschwald: *Fraxinus* unten	43,25 «
13.	*Phragmites* (obere Schicht)	40,4 «

14. *Pinus nigra* Forst	37,1	%
15. Mischwald: *Ulmus-Acer-Quercus*	26,8	«
16. Mischwald: *Pinus*	22,1	«
17. *Schoenoplectus* Ass.	21,6	«
18. Mischwald: *Robinia*	19,3	« (auffallender Wert, vgl. unten)
19. *Carex riparia* Ass.	18,3	«
20. *Phragmites* (unterste Schicht)	16,42	«
Standardevaporimeter	69,2	«



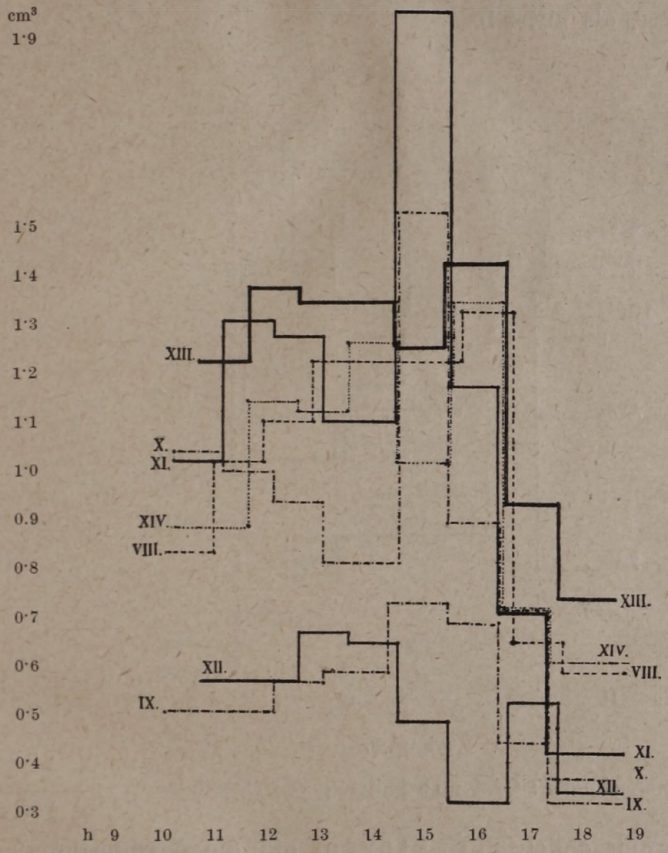
Figur 1.

Evaporimeter: W-SW Seite, am Fusse von Csucshegy.

I.	Robinia	5 cm (SW)	XI.	Fels	5 cm SW
II.	Schoenoplectus	7 «	XII.	Fraxinus ornus	30 W
III.	Carex riparia	12 «	XIII.	Fels (Sedum)	7 SW
IV.	Phragmites	3 «	XIV.	Gipfel	2·00
V.	«	2·10 «	XV.	Festuca sulcata	5 W
VI.	Pinus nigra	1·30 «	XVI.	« Grat	5
VII.	Prunus spinosa	45 «	XVII.	« «	6 O
VIII.	Verbascum spec.	10 NW-W	XVIII.	Cotinus	1·20 W
IX.	Fraxinus ornus	1·50	XIX.	Mischwald	40 O-NO
X.	Lavandula	5 SO-O	XX.	Pinus nigra	40 O-NO

Am grössten ist also die Transpiration an den exponierten Felsenstandorten (cca 6-mal grösser, als im Schilfrohr), dann

kommen die «pannonischen» Wiesensteppen (nebst Weiden und das *Cotinetum*), die typischen xerophilen Assoziationen (cca 4—5-mal grösser, als im Schilfrohr); die dritte Gruppe bilden

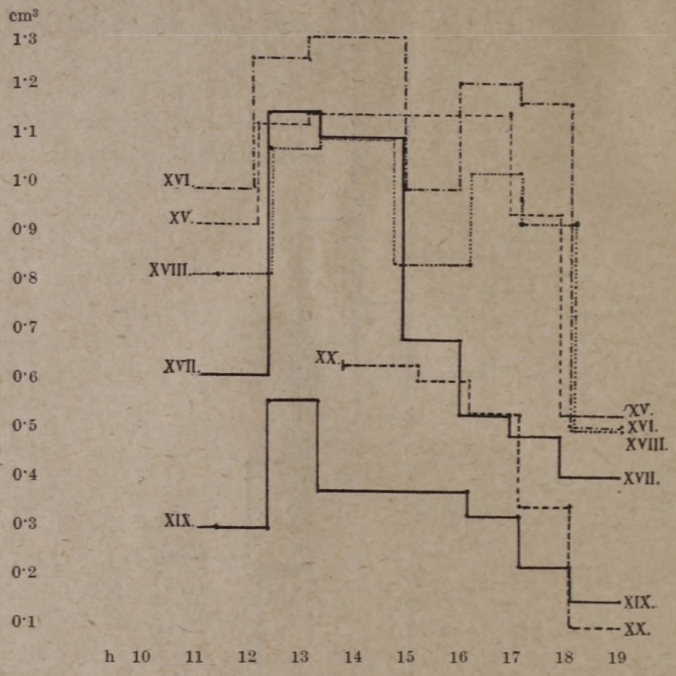


Figur 2.

Evaporimeter: S-SO Seite, bis zum Gipfel.

die subxerophilen Gebüsche und Wälder (1½—3-mal so gross, als im Schilf) — jedoch gehört in diese Gruppe auch die obere Schicht des Schilfes, Erklärung zur Xeromorphie von *Phragmites!* — wo besonders im Wind die Transpiration enorm steigt; endlich kommen die helophytischen Pflanzengesellschaf-

ten. Das Resultat von E. No. 18 scheint mir an diesem Tage nicht zuverlässig zu sein, vgl. damit die Werte von 11. VII., die eine richtigere Reihenfolge darstellen (es war ein sonniger, windstiller Tag, darum ist die Transpiration des Schilfes oben kaum grösser, als unten!).

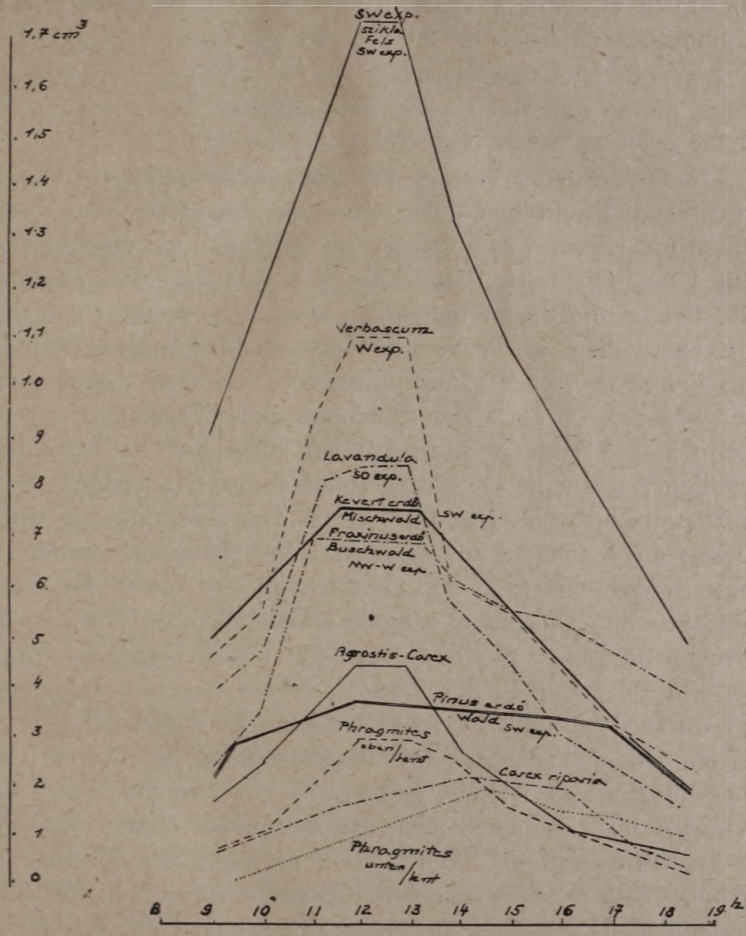


Figur 3.

Evaporimeter: Grat und Ahhänge von Csúcshegy.

Die hauptsächlichen Faktoren, die die Verdunstungskraft der Atmosphære (zahlenmässig ausgedrückt die Wassermenge, die die Atmosphaere in der Zeiteinheit von einer benetzten Oberfläche in Form von Wasserdampf aufnimmt), also die Transpiration bestimmen, sind die folgenden: Sättigungsdefizit der Luft (selbst ein Faktorkomplex, abhängig von der relativen Feuchtigkeit und von der Temperatur), Besonnung (die Belichtung durch die Sonne erhöht die Temperatur der verdunstenden Oberfläche über die Lufttemperatur) und die Windstärke. Vor-

mittags steigen die Kurven (s. Figur 1—4) mit der raschen Erhöhung der Temperatur und der sich verstärkenden Besonnung steil auf, nachmittags fallen sie im allgemeinen langsamer ab.



Figur 4.
11. VII. 1928. Tihany, Csúcshegy W-Seite.

(Nach Sonnenuntergang meist starker Abfall, in kühlen, stillen Nächten hört die Verdunstung ganz auf, dagegen in warmen oder stürmischen bleibt sie noch ziemlich bedeutend.) Die meisten

Unregelmässigkeiten in dem Verlauf der Kurven verursacht die Luftbewegung; die Transpiration der Schilfblätter ist an einem windigen Tage 2,45-mal so gross, als im Schatten des Schilfes, an einem windstillen Tag nur 1,28-mal so gross. Am 28/VIII nachmittags zwischen 14^h 30—15^h 30 war ziemlich starker Luftzug am S-Hang des Csúcshegy (bis 5 m pro sec Geschwindigkeit), darum die Maxima der Evaporimeter No. 10—11, später mehr um den Gipfel, vgl. No. 13—14.

Den speziellen Verlauf der Kurven bedingen die lokalklimatischen Unterschiede der einzelnen Standorte, bes. relative Höhe (über dem Wasserspiegel des Balatons) und die Expositon. Die Evaporimeter am Rande des Sees, von Nordosten geschützt, der Sonne und dem Winde kaum ausgesetzt, zeigen einen ziemlich ähnlichen Kurvenverlauf, mit einem Vormittags-Mittagsmaximum (No. 2—7 *Phragmites*-Kurve hat zwei Gipfel, Nachmittagswind, — auch der Robinienstandort bekommt nur nm. Sonne). Die stark windexponierten Standorte haben doppelgipflige Kurven, neben Mittagsmaxima auch windbedingte Nachmittagsmaxima (No. 10—11, 13—14, 16: Felsstandorte, Gipfel, Grat); die Standorte mit ausgesprochener O-Exposition ein Vormittagsmaximum (No. 10, 17, 19—20), die mit W-Exposition ein Nachmittagsmaximum oder das Maximum reicht in den späten Nachmittag hinein (No. 8, 15, 18). Am besten zeigen die Unterschiede die 3 Kurven der *Festuca sulcata* Ass., die Evaporimeter wurden ungefähr je 10 m voneinander aufgestellt, der No. 17 (am O-Hang) zeigt das Vormittagsmaximum, der No. 16 (Grat) den Einfluss des Windes, der No. 15 zeigt einem flachen Gipfel, aber bis 17^h, gleich dem daneben höher (1,2 m über dem Boden) aufgestellten No. 18, bei dem schon die Wirkung des Windes zum Ausdruck kommt. Was die Höhe (und die damit verbundene Exposition und mikroklimatische Unterschiede) anbelangt, verweise ich auf zwei Beispiele: der *Fraxinus* Standort oben (cca 210 m) verdunstete 4,75 cm^3, mit 90 m weiter unten nur 4,60 cm^3; der Standort von *Pinus nigra* oben (cca 190 m) 3,95 cm^3, der am Ufer (cca 110 m) nur 2,35 cm^3 (auch windgeschützt).

Einen sehr grossen Einfluss übt auch das Licht auf die

Verdunstung aus. Messungen mit EDER-HECHT-schen Photometer: (10 Min. Belichtung, um Mittag):

	Lichtintensität in BUNSEN-ROSCOË Einheiten		
14. Frei Stelle	525 BR	8,9 cm³	1,15 cm³
20. Halbschatten von *Pinus*	74 «	3,95 «	0,60 «
12. Waldrand des Mischwaldes	18 «	4,75 «	0,55 «
19. Mitte des Mischwaldes	10,3 «	2,85 «	0,40 «

Die 2. Kolumne gibt die Gesamtverdunstung (10—18,30^h), die 3. die Transpirantions-Mittelwerte der frühen Nachmittagsstunden (12—16^h).

Anmerkung. Im Frühling des Jahres 1928 habe ich mehrere Transpirationsmessungen mit den LIVINGSTONE-SHIWE-schen Atmometer, in einer von mir modifizierten Aufstellung, durchgeführt. Von den Ergebnissen seien hier folgende Angaben angeführt:

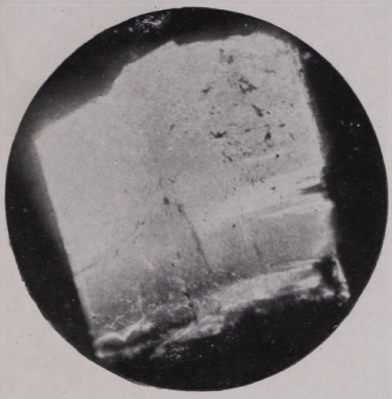
	Lichtintensität (10 min.)	Verdunstungskraft	
21. IV. Robinietum (vor Belaubung)	130 BR	330 mm³	sonnig
Pinetum nigræ	75 «	260 «	«
24. IV. Standort E. No. 8	26 «	320 «	bewölkt
Standort E. No. 20	32 «	330 «	halb bewölkt
26. IV. Frei (Institutspark)	370 «	250 «	sonnig
Halbschatten (Institutspark)	84 «	225 «	«
Schatten (Institutspark)	33 «	120 «	«
4. V. Standort E. No. 8	145 «	590 «	«
Standort E. No. 9	7 «	320 «	«

Diese Transpirationsmessungen sollen im nächsten Jahre und zwar monatlich mehrmals wiederholt, fortgesetzt werden. Ich folgte in diesen dem H. WALTER-schen Muster (Einführung in die Pflanzengeographie Deutschlands 1927, 153—158, ausführlicher Jahrb. für wissenschaftliche Botanik 1928, 233—238). Auch innerhalb einer Pflanzengesellschaft, ferner an verschiedenen Standorten derselben Arten (also Verdunstungsmessungen «in kleinsten Raume») will ich sie unternehmen, ebenso die Verdunstungsverhältnisse bei den verschiedenen Hauptwettertypen (1. klare, wolkenlose Tage s. Figur 4, 2. klare, stürmische Tage, 3. trübe, stürmische Tage — an trüben, regnerischen Tagen gibt es wohl keine grosse Unterschiede — s. WALTER l. c. 281) feststellen. Zur Frage der Xeromorphie, ferner der Unabhängig-

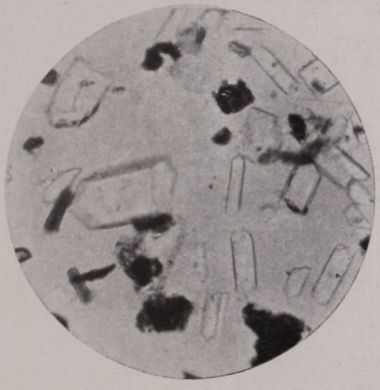
keit der Transpirationsintensität von der Feuchtigkeit des Standortes und der Wirkungen der Klimafaktoren (Sättigungsdefizit resp. Temperatur, — von dem absoluten Wassergehalt der Luft ist die Verdunstungskraft ganz unabhängig — Licht und Luftbewegung) werde ich in der Zusammenfassung der Ergebnisse sämtlicher Versuche einige Worte sprechen.

Mit Rat und Tat hat mich dabei mein Freund, Prof. Dr. H. WALTER—Heidelberg, unterstützt, ferner an den Messungen noch Frau ERNA WALTER, Ing. PAUL MAGYAR — der mit gleichen Evaporimetern die Verdunstungsmessungen in Pflanzengesellschaften des Alföld in grossem Umfange unternommen hat — und Oberlehrer G. SZEMES. Empfangen sie alle meinen innigsten Dank.

3.

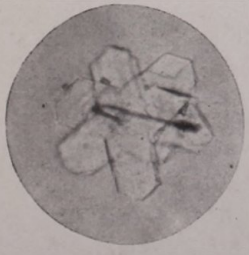


4.



5.

6.



7.

8.

M.T. AKADÉMIA KÖNYVTÁRA